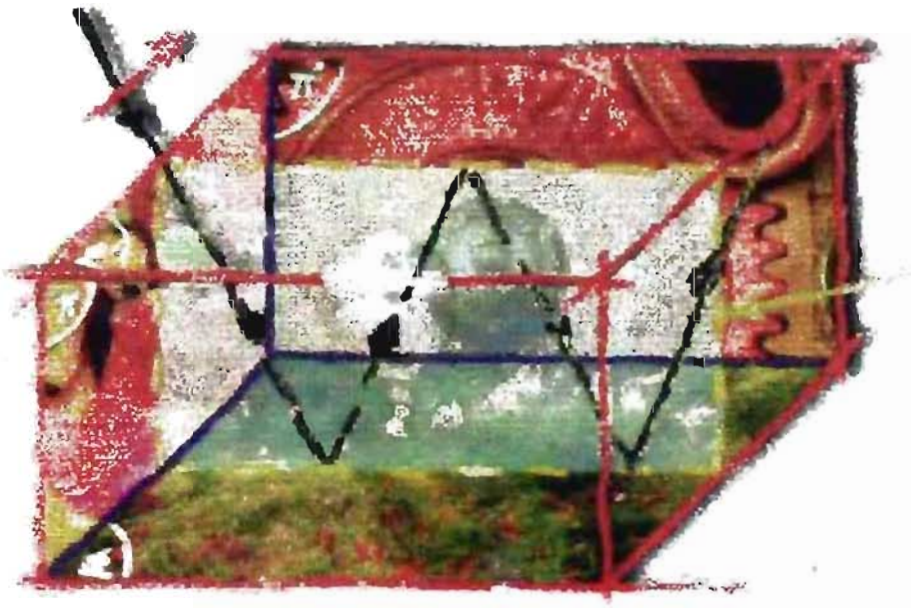
P.F. Combes

2e cycle universitaire / Écoles d'ingénieurs

Micro-ondes

1. Lignes, guides et cavités

Cours et exercices



Micro-ondes
1. Lignes, guides et cavités
Cours et exercices

Micro-ondes
1. Lignes, guides et cavités
Cours et exercices

Paul François Combes
Professeur d'université
Docteur ès sciences

Avant-propos

Les micro-ondes se sont beaucoup développées depuis les années 1940 et elles ont actuellement des applications nombreuses et très importantes pour les télécommunications tant terrestres que spatiales, pour le radar et les systèmes de radionavigation, pour l'observation et la télédétection de la Terre ainsi que pour le chauffage industriel et domestique. Elles présentent aussi une grande utilité en médecine où l'hyperthermie micro-onde est étudiée pour le traitement des tumeurs cancéreuses, en radioastronomie où les grands radiotélescopes micro-ondes ont permis des progrès décisifs dans la connaissance de l'Univers, en recherche physique aussi bien en spectroscopie que pour le traitement et la caractérisation des matériaux. Par ailleurs, les très grandes puissances fournies par des tubes micro-ondes comme les klystrons sont indispensables dans les accélérateurs de particules, les dispositifs étudiés pour la fusion thermonucléaire contrôlée ou même le projet très ambitieux de satellite de puissance solaire.

L'enseignement des micro-ondes a suscité beaucoup d'ouvrages en langue anglaise mais relativement peu en langue française. Pourtant les chercheurs français se sont intéressés très sérieusement aux micro-ondes dès les années 1930 et, après la coupure de la Seconde Guerre mondiale, un nouvel élan, surtout industriel, a été pris dans les années 1950.

Mais il aura fallu attendre les années 1970 pour que la recherche universitaire micro-ondes devienne très active en France, comme en témoigne, depuis lors, l'organisation régulière de Journées nationales de Micro-ondes présentant les travaux de nombreux centres de recherches dynamiques. Cependant, cette activité a donné lieu à des publications très spécialisées et à des ouvrages de synthèse d'un niveau trop élevé pour nos étudiants d'IUT, de licence et de maîtrise, d'IUP et de formation continue ainsi que pour la plupart des élèves des Écoles d'ingénieurs.

Le présent ouvrage a pour but de proposer une présentation pédagogique de l'enseignement des micro-ondes, adaptée aux niveaux du premier cycle (2^e année) et du second cycle de l'enseignement supérieur, c'est-à-dire à un stade de formation où les jeunes gens ont à découvrir les micro-ondes et à acquérir une solide formation de base. Il est le fruit de ma déjà longue expérience de l'enseignement des micro-ondes non seulement à l'université Paul Sabatier tant à l'IUT qu'en maîtrise EEA, en licence de télécommunications et à l'IUP mais aussi en troisième année d'Écoles d'ingénieurs, notamment à Sup-

Aéro, Sup-Télécom, l'ENSEEIHT et l'ENAC et enfin en formation continue. La rédaction de ces chapitres a donc été testée et renouvelée à travers un enseignement complet à des promotions d'étudiants, d'élèves-ingénieurs et de stagiaires de divers niveaux et cursus.

Cet ouvrage est formé de deux volumes que les éditions Dunod publieront en 1996 et en 1997. Le premier volume traite des notions de base, présentées en deux parties :

- L'une concerne les lignes utilisées pour la transmission et les circuits. Leur étude est effectuée à l'aide des concepts de tension et courant qui permettent un exposé didactique et facilitent la compréhension des principales propriétés caractéristiques du phénomène de propagation. Les sujets traités approfondissent également la réflexion sur une ligne, le diagramme de Smith et le problème de l'adaptation. Les cas des lignes avec pertes et des lignes en régime transitoire font l'objet de deux chapitres. Enfin sont exposées les applications de ces bases théoriques pour les lignes bifilaires, coaxiales, microbandes et à fentes ainsi que pour la réalisation des impédances et des circuits accordés, essentielle pour les circuits de l'électronique micro-onde.
- L'autre partie de ce premier volume concerne les guides d'ondes et les cavités qui sont évidemment étudiés à l'aide des concepts de champs électrique et magnétique. La progression pédagogique adoptée, permet d'étudier d'abord la réflexion et la réfraction des ondes électromagnétiques à une interface entre deux milieux. Puis le guide d'ondes rectangulaire est présenté comme une structure dans laquelle les ondes se propagent par réflexions successives sur les surfaces métalliques planes qui le délimitent ; c'est seulement après avoir donné cette présentation physique des phénomènes qu'est effectuée l'étude mathématique de la propagation dans les guides d'ondes métalliques à partir des équations de Maxwell. On retrouvera ces deux aspects complémentaires dans l'étude des guides d'ondes diélectriques. Enfin, le chapitre sur les cavités électromagnétiques ne traite pas seulement des conditions de résonance d'une cavité et de sa modélisation, il s'intéresse également au couplage d'une cavité par un ou deux accès.

Afin que ce livre soit un outil d'étude et de travail complet, des énoncés d'exercices sont proposés à la fin de la plupart des chapitres, avec indication du paragraphe auquel se rapporte chaque exercice. En général, il s'agit d'exercices qui doivent pouvoir être traités en quinze à trente minutes maximum pour un étudiant qui a bien appris son cours. La solution complète de chacun des 82 exercices est donnée à la fin du livre. En faisant lui-même ces exercices, en étudiant ensuite la solution proposée, le lecteur de ce livre dispose d'une réelle possibilité d'approfondissement et d'assimilation du sujet étudié.

Je tiens à remercier très vivement les collègues qui m'ont fait l'amitié de vérifier l'exactitude des solutions fournies, et simultanément, d'effectuer la relecture des chapitres correspondants : Messieurs Michel Aubès et Gabriel Soum tout particulièrement ; Mesdames Isabelle Chênerie et Christine Galy ; Messieurs Jean-Louis Amalric, Jacques David et Roger Kété.

Le second volume de cet ouvrage sur les micro-ondes devrait être publié en 1997 ; il traitera, en trois parties, des sujets importants que sont :

- les circuits passifs réciproques et non réciproques,
- la propagation des ondes électromagnétiques en espace libre,
- les antennes,

et il inclura, de même, des exercices avec solutions complètes.

Comme il faut beaucoup de persévérance pour mener à bien une telle œuvre et que les encouragements de ma famille ont été essentiels, je veux dire, en terminant, que je dédie cet ouvrage à la mémoire de mes chers parents, à mes filles Marie-Christine et Florence et à Claude, ma femme.

Toulouse, le 20 juillet 1995

Table des matières

Chapitre 1. Les micro-ondes et leurs applications 1

1.1 Définition et classification 1
1.2 Historique et applications 3
1.3 Les lignes pour la transmission et les circuits 6
1.4 Les systèmes terrestres de transmission en espace libre 13
1.5 Les systèmes spatiaux de transmission en espace libre 17
1.6 Attribution des bandes de fréquences micro-ondes 22

1re partie
Lignes pour la transmission et les circuits **25**

Chapitre 2. Propagation sur une ligne en haute fréquence 27

2.1 Modélisation de la ligne 27
2.2 Équation de propagation 29
2.3 Étude des solutions de l'équation de propagation 32
2.4 Expression de la tension du courant et de l'impédance 34
2.5 Cas particulier : ligne terminée par $Z_R = Z_C$ – Ondes progressives 35
2.6 Cas particulier : ligne en court-circuit ou en circuit ouvert 37
2.7 Cas particulier : ligne quart d'onde – ligne demi-onde 38
2.8 La vitesse de groupe 39
EXERCICES 44

Chapitre 3. Étude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne 47

3.1 Équations correspondant aux nouvelles hypothèses 47
3.2 Coefficient de réflexion 49
3.3 Cas particulier où $\Gamma_R = 1$ – Régime d'ondes stationnaires 49
3.4 Cas général des lignes à coefficient de réflexion quelconque 54
3.5 Mesures de tensions sur une ligne 58
3.6 Mesure de l'impédance de charge d'une ligne 60
EXERCICES 62

Chapitre 4. Diagramme de Smith 65

4.1 Intérêt 65
4.2 Principe et construction du diagramme 66
4.3 Propriétés du diagramme 69
4.4 Détermination de l'impédance de charge d'une ligne 73
EXERCICES 75

Chapitre 5. Les dispositifs d'adaptation 77
5.1 Le problème de l'adaptation 77
5.2 Conditions d'adaptation 78
5.3 Adaptation par ligne quart d'onde 79
5.4 Adaptation à l'aide d'un stub 81
5.5 Adaptation à l'aide de deux stubs 83
5.6 Utilisation du diagramme de Smith 84
5.7 Adaptation par réseau d'impédances et tronçon de ligne 88
EXERCICES 90

Chapitre 6. Lignes avec pertes 93
6.1 Étude du paramètre de propagation et de l'impédance caractéristique 93
6.2 Importance de la condition d'Heaviside – Moyens de la réaliser 95
6.3 Expressions de la tension, du courant et de l'impédance 97
6.4 Étude des variations de la tension et du courant 98
6.5 Variations de l'impédance et du coefficient de réflexion 101
6.6 Puissance transportée par une ligne 103
EXERCICES 106

Chapitre 7. Lignes en régime impulsionnel 107
7.1 Introduction 107
7.2 Étude en régime d'impulsion de tension 108
7.3 Étude en régime d'échelon de tension 113

Chapitre 8. Lignes bifilaires et coaxiales 121
8.1 Paramètres primaires 121
8.2 Paramètres secondaires de la ligne coaxiale 123
8.3 Dimension optimale d'une ligne coaxiale 125
8.4 Puissance transportable par une ligne coaxiale 126
8.5 Paramètres secondaires de la ligne bifilaire 127
8.6 Paramètres secondaires des lignes utilisées en basse fréquence 129
8.7 Exemples de lignes utilisées en télécommunications 130
8.8 Abaque d'impédances caractéristiques 133
EXERCICES 135

Chapitre 9. Les lignes à bandes et à fentes 137
9.1 Les principaux types de lignes 137
9.2 Permittivité effective des lignes microbande – Longueur d'onde et vitesse de propagation 139
9.3 Impédance caractéristique des lignes microbande 141
9.4 Affaiblissement d'une ligne microbande 145
9.5 La ligne triplaque 147
9.6 La ligne à fente 150
EXERCICES 153

Chapitre 10. Réalisation des impédances et des circuits résonnants 155
10.1 Équivalence entre un tronçon de ligne et une inductance ou un condensateur 156
10.2 Réalisation d'inductances et condensateurs 158
10.3 Réalisation de circuits résonnants 161
10.4 Équivalence entre une ligne $\lambda/4$ ou $\lambda/2$ et un circuit résonnant 164
10.5 Réalisation des impédances par des éléments à constantes localisées 166
EXERCICES 173

2e partie
Guides d'ondes et cavités **175**

Chapitre 11. Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques **177**
11.1 Introduction 177
11.2 Réflexion sur un plan conducteur sous incidence normale 179
11.3 Réflexion sur un plan conducteur sous incidence oblique 183
11.4 Réflexion et transmission à l'interface de deux diélectriques 188
EXERCICES 200

Chapitre 12. Les guides d'ondes rectangulaires **203**
12.1 Les divers types de guide d'ondes étudiés 203
12.2 Propagation entre deux plans parallèles 204
12.3 Propagation dans un guide d'ondes rectangulaire 207
12.4 Longueurs d'onde de propagation guidée et de coupure 210
12.5 Étude du mode fondamental 213
12.6 Étude des modes TE_{mo} ou TE_{on} 216
12.7 Dimensions et bande passante d'un guide d'ondes rectangulaire 218
12.8 Atténuation dans les guides d'ondes rectangulaires 219
12.9 Guides rectangulaires surdimensionnés 222
12.10 Les guides d'ondes à nervure 223
12.11 La ligne à ailettes 225
EXERCICES 228

Chapitre 13. Étude générale de la propagation en guides d'ondes métalliques **231**
13.1 Introduction 231
13.2 Équations de propagation des ondes guidées 232
13.3 Les différents types d'ondes de propagation guidée 237
13.4 Les guides d'ondes rectangulaires 243
13.5 Les guides d'ondes circulaires 248

13.6 Étude générale de la réflexion des ondes guidées 255
13.7 Le concept d'impédance, d'impédance d'onde et d'impédance réduite 260
EXERCICES 263

Chapitre 14. Les guides d'ondes diélectriques 265
14.1 Introduction 265
14.2 Propagation en guides diélectriques à structure plane 266
14.3 Propagation en guides diélectriques à structure cylindrique 269
14.4 Les fibres optiques 271
14.5 Caractéristiques des fibres optiques 274
14.6 Théorie électromagnétique des guides diélectriques 278
14.7 Caractéristiques de la propagation 282
EXERCICES 285

Chapitre 15. Les cavités électromagnétiques 287
15.1 Introduction 287
15.2 Étude des conditions de résonance d'une cavité 288
15.3 Principaux types de cavités résonnantes 291
15.4 Coefficient de surtension d'une cavité 297
15.5 Modélisation d'une cavité – Impédance d'entrée 301
15.6 Cavités couplées par un accès 306
15.7 Cavités couplées par deux accès 310
15.8 Applications des cavités 314
EXERCICES 319

Solutions des exercices 321
Exercices du chapitre 2 321
Exercices du chapitre 3 324
Exercices du chapitre 4 327
Exercices du chapitre 5 333
Exercices du chapitre 6 338
Exercices du chapitre 8 340
Exercices du chapitre 9 343
Exercices du chapitre 10 345
Exercices du chapitre 11 347
Exercices du chapitre 12 349
Exercices du chapitre 13 353
Exercices du chapitre 14 357
Exercices du chapitre 15 359

Bibliographie 363

Conventions de notations

Nous voulons représenter par la première lettre de l'alphabet une quantité scalaire (par exemple une tension ou un courant) ou vectorielle (par exemple un champ électrique ou magnétique) qui est une fonction de l'espace (représenté par la variable r) et du temps (représenté par la variable t).

Nous noterons $\underline{a}(r, t)$ la valeur instantanée complexe de cette quantité. En régime sinusoïdal :

$$\underline{a}(r, t) = \underline{A}(r)\, e^{j\omega t}$$

$\underline{A}(r)$ est l'amplitude complexe dont le module est A et la phase φ :

$$\underline{A}(r) = A(r)\, e^{j\varphi(r)}$$

En notation réelle, la valeur instantanée réelle est :

$$a(r, t) = \mathcal{R}\,[\underline{a}(r, t)] = A(r) \cos\,[\omega t + \varphi(r)]$$

Nous utiliserons, en général, la notation complexe qui a le grand avantage de permettre la mise en facteur du terme $e^{j\omega t}$ représentant la variation temporelle, ce qui n'est pas possible en notation réelle. Ainsi, il est possible de conduire tous les calculs intermédiaires en amplitudes complexes, ce qui permet de bien simplifier les calculs.

Pour la notation des logarithmes, les conventions sont les suivantes :

– logarithme népérien ln,

– logarithme décimal log.

Chapitre 1

Les micro-ondes et leurs applications

1.1 DÉFINITION ET CLASSIFICATION

1.1.1 Définition des micro-ondes

Le mot micro-ondes est la traduction littérale de l'anglais microwaves (*wave* = onde). Le terme spécifiquement français est hyperfréquences, mais l'utilisation de micro-ondes est plus largement répandue.

Les micro-ondes sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est comprise entre 300 MHz et 300 GHz (MHz = Megahertz = 10^6 Hz et GHz = Gigahertz = 10^9 Hz).

La fréquence f d'une onde est reliée à sa longueur d'onde λ_0 dans l'air ou le vide par $\lambda_0 = c/f$ où $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. C'est la vitesse (ou célérité) des ondes électromagnétiques dans l'air ou le vide.

- À 300 MHz, la longueur d'onde est $\lambda_0 = 1$ m,
- à 300 GHz, la longueur d'onde est $\lambda_0 = 1$ mm.

Les micro-ondes sont donc des ondes :

- décimétriques entre 300 MHz ($\lambda_0 = 10$ dm) et 3 GHz ($\lambda_0 = 1$ dm),
- centimétriques entre 3 GHz ($\lambda_0 = 10$ cm) et 30 GHz ($\lambda_0 = 1$ cm),
- millimétriques entre 30 GHz ($\lambda_0 = 10$ mm) et 300 GHz ($\lambda_0 = 1$ mm).

Évidemment, les frontières inférieure et supérieure ne sont pas brutales et l'on pourra être amené à s'intéresser à des dispositifs, des lignes ou des types de propagation qui concernent :

- les ondes sub-millimétriques jusque vers 1 000 GHz ($\lambda_0 = 0{,}3$ mm),
- les ondes métriques jusque vers 100 MHz ($\lambda_0 = 3$ m).

1.1.2 Situation des micro-ondes dans le spectre électromagnétique

Dans le spectre des ondes électromagnétiques, on trouve successivement, en partant des ondes les plus longues :

- Les ondes radio-électriques de $\lambda_0 = 10$ km pour $f = 30$ kHz (kHz = kilohertz = 10^3 Hz) à $\lambda_0 = 1$ m pour $f = 300$ MHz.
- Les micro-ondes de $\lambda_0 = 1$ m pour $f = 300$ MHz à $\lambda_0 = 1$ mm pour $f = 300$ GHz.
- Les ondes infra-rouges de $\lambda_0 = 1$ mm pour $f = 300$ GHz à $\lambda_0 = 1$ µm pour $f = 300$ THz (THz = Terahertz = 10^{12} Hz).
- Les ondes visibles de $\lambda_0 = 0{,}9$ µm à $\lambda_0 = 0{,}5$ µm (1 µm = 1 micron = 10^{-6} m).
- Les ondes ultraviolettes de $\lambda_0 = 0{,}5$ µm pour $f = 600$ THz à $\lambda_0 = 10$ nm (1 nm = 1 nanomètre = 10^{-9} m) pour $f = 30 \cdot 10^{15}$ Hz.
- Les rayons X et les rayons gamma pour des fréquences supérieures à $3 \cdot 10^{16}$ Hz soit pour des longueurs d'onde inférieures à 10^{-8} m.

Les micro-ondes sont donc situées plutôt dans la moitié inférieure, si l'on raisonne en fréquences, du spectre des ondes électromagnétiques tandis que les ondes visibles de l'optique sont situées plutôt dans la moitié supérieure.

1.1.3 Classification des micro-ondes en bandes de fréquences ou en gammes de longueurs d'ondes

On distingue successivement :

- Les ultra hautes fréquences (en anglais : *ultra high frequencies*) ou UHF, de 300 MHz à 3 000 MHz. Elles correspondent aux ondes décimétriques (de $\lambda_0 = 10$ dm à $\lambda_0 = 1$ dm).
- Les supra hautes fréquences (en anglais : *supra high frequencies*) ou SHF, de 3 GHz à 30 GHz. Elles correspondent aux ondes centimétriques (de $\lambda_0 = 10$ cm à $\lambda_0 = 1$ cm).
- Les extra hautes fréquences (en anglais : *extra high frequencies*) ou EHF, de 30 GHz à 300 GHz. Elles correspondent aux ondes millimétriques (de $\lambda_0 = 10$ mm à $\lambda_0 = 1$ mm).

Pour la partie des micro-ondes située entre 1 GHz et 100 GHz, les utilisateurs ont classifié un certain nombre de sous-bandes qui sont indiquées dans le tableau ci-dessous, avec les fréquences et les longueurs d'onde correspondantes.

Bande	Bande de f	Gamme de λ_0
L	1 à 2 GHz	30 à 15 cm
S	2 à 4 GHz	15 à 7,5 cm
C	4 à 8 GHz	7,5 à 3,75 cm
X	8 à 12 GHz	3,75 à 2,5 cm
Ku	12 à 18 GHz	2,5 à 1,67 cm
K	18 à 27 GHz	1,67 à 1,11 cm
Ka	27 à 40 GHz	1,11 à 0,75 cm
U	40 à 60 GHz	7,5 à 5 mm
V	60 à 80 GHz	5 à 3,75 mm
W	80 à 100 GHz	3,75 à 3 mm

1.2 HISTORIQUE ET APPLICATIONS

Le théoricien fondateur de l'électromagnétisme moderne et, par conséquent, des bases théoriques des micro-ondes est James Clerck Maxwell qui formula, dans les années 1860, les célèbres équations (vol. 2, chapitre 5) qui portent son nom et qu'il publia en 1873 dans son *Traité sur l'électricité et le magnétisme*.

Une vingtaine d'années plus tard, en 1888, Heinrich Hertz fut le premier à produire expérimentalement et à détecter des ondes électromagnétiques à une fréquence de l'ordre de 1 GHz. C'est pourquoi, on appelle souvent ondes hertziennes, les ondes décimétriques. Lord Rayleigh, pour sa part, démontra théoriquement en 1897, la possibilité de faire propager des ondes dans des tuyaux métalliques creux à section rectangulaire ou circulaire, que l'on appelle guides d'ondes.

À la suite des travaux de Hertz, la radioélectricité connut un développement très important. Les expériences de Marconi, dans les années 1890, montrèrent qu'il était possible d'établir une liaison entre deux points de la Terre par propagation d'ondes radioélectriques en espace libre. Kennelly et Heaviside, au début du XX^{e} siècle, découvrirent les propriétés réfléchissantes, vis-à-vis d'ondes décamétriques, de certaines couches de l'ionosphère vers 100 km de hauteur. Les radio ou télécommunications modernes (la TSF, « télégraphie sans fil », comme l'on disait alors) étaient nées *[1]*.

Les ondes radioélectriques nécessaires pour ces liaisons de télécommunications étaient produites par des tubes électroniques inventés en 1907 par Lee de Forest. Pendant 50 ans, jusqu'à l'avènement des transistors et des dispositifs à l'état solide, ces tubes – triodes et tétrodes – furent universellement utilisés.

Des techniques radioélectriques nouvelles virent ensuite le jour. En 1920, les premières émissions de radiodiffusion eurent lieu, notamment en France, depuis un émetteur situé à la Tour Eiffel, sous l'impulsion du général Ferrié qui transposa ainsi dans le domaine civil, les progrès effectués par l'électronique dans le domaine militaire pendant la Première Guerre mondiale.

Dans les années 1930, la mise au point du premier tube micro-onde, le magnétron, et de la première antenne micro-onde, le réflecteur paraboloïdal, permirent le développement d'un système spécifiquement micro-onde : le radar (pour *Radio Detection and Ranging*). Des recherches importantes furent alors effectuées dans les grands pays industrialisés. Les équipes françaises obtinrent des résultats importants, concrétisés par l'implantation de radars à bord des navires, notamment en 1935, à bord du paquebot Normandie. Les radars anglais, également très performants, permettaient, dès 1939, une surveillance efficace de l'espace aérien britannique. L'apport des États-Unis pendant la Seconde Guerre mondiale fut considérable et les recherches du Massachusetts Institute of Technology (le célèbre MIT) furent publiées entre 1945 et 1950, en une collection *[2]* de 25 volumes qui servirent de bible aux étudiants et chercheurs en micro-ondes du monde entier. Certains de ces volumes ont une telle valeur de référence qu'ils ont été à nouveau publiés ces dernières années !

Dès lors, le développement des micro-ondes fut considérable et les applications nombreuses et importantes :

Chauffage industriel et domestique (fours à micro-ondes) *[3]*

Grâce à l'utilisation de magnétrons comme tubes de puissance et la propriété des micro-ondes, de pénétrer au cœur de matériaux de type diélectriques à pertes, il est possible d'y dissiper de l'énergie. Ceci permet un chauffage plus rapide et plus homogène que par les méthodes traditionnelles. La fréquence utilisée est de 2 450 MHz.

Médecine

L'hyperthermie micro-ondes est étudiée pour le traitement de tumeurs cancéreuses. Le problème étant de n'irradier à une température précise, que la zone occupée par la tumeur. Inversement, une exposition prolongée (plusieurs heures) aux micro-ondes peut être dangereuse, de même d'ailleurs qu'à n'importe quel type de rayonnement électromagnétique (celui du soleil, par exemple). Le seuil à ne pas dépasser est de 1 mW/cm^2 soit 10 W/m^2.

Radioastronomie *[4]*

On a découvert que le rayonnement des étoiles et des galaxies est très riche dans le domaine des micro-ondes et que l'on peut en retirer des informa-

tions complémentaires de celles recueillies dans le domaine du visible. C'est ainsi qu'on été mis au point des radiotélescopes munis d'une grande antenne parabolique, de 100 m de diamètre ou plus (vol. 2, chap. 13 « Les antennes à réflecteurs »), et d'amplificateurs à très faible bruit (Masers), refroidis si nécessaire, à la température de l'hélium liquide (4 K). La radioastronomie a permis de faire de grands progrès dans la connaissance de l'univers, notamment par l'observation à plusieurs centaines de millions, voire à plusieurs milliards d'années-lumière, de galaxies ou de sources nouvelles telles que les pulsars et les quasars.

Électronique

On sait maintenant réaliser des circuits et des dispositifs très performants qui accomplissent en micro-ondes les grandes fonctions de l'électronique classique : oscillation, amplification, mélange et multiplication de fréquence *[5]*. Cela a été possible grâce à la conception et à l'élaboration de composants actifs tels que diodes et transistors spécifiques, et de composants passifs appropriés (vol. 1, chap. 10 et vol. 2, chap. 1). La miniaturisation de ces circuits, grâce à l'utilisation d'une technologie d'intégration hybride ou monolithique, les rend particulièrement aptes à être utilisés dans les techniques spatiales.

Radiométrie micro-onde *[6]*

Cela consiste à mesurer à l'aide d'un récepteur très sensible (radiomètre à puissance totale ou radiomètre de Dicke), la puissance émise en micro-ondes par une zone couverte par le diagramme d'une antenne reliée au radiomètre. Ces radiomètres peuvent être aéroportés ou sur satellite et sont utilisés en télédétection pour l'évaluation de caractéristiques physiques (humidité, par exemple) ou naturelles (ressources agricoles, par exemple) de la zone observée. L'avantage de la radiométrie micro-onde est qu'elle reste opérationnelle, aussi bien la nuit que le jour et même en présence d'une couverture nuageuse et (ou) de précipitations.

Radionavigation

Outre le radar *[7]*, plusieurs systèmes *[8]* permettent d'assurer le repérage et le guidage des avions : le V.O.R. (*VHF Omnidirectionnal Range*) pour indiquer la direction, le D.M.E. (*Distance Measurement Equipment*) et le T.A.C.A.N. (militaire) pour indiquer la distance ainsi que l'I.L.S. (*Instrument Landing System*) et bientôt le M.L.S. (*Microwave Landing System*) pour l'atterrissage automatique.

Accélérateurs de particules

Ce sont des klystrons (tubes spécifiquement micro-ondes) de très fortes puissances (100 kW en régime permanent) qui fournissent aux particules l'énergie nécessaire pour les accélérer à des vitesses relativistes (vitesses proches de $3 \cdot 10^8$ m/s). De même, dans les dispositifs étudiés pour la fusion thermonucléaire contrôlée, on compte sur des superklystrons pour produire,

dans un espace confiné, la température de plusieurs dizaines de millions de degrés, qui est nécessaire pour produire la fusion des atomes d'hydrogène.

Recherche physique

Les micro-ondes sont très utilisées aussi bien en spectroscopie que pour le traitement (par polymérisation) et la caractérisation (mesure de la permittivité diélectrique) des matériaux, notamment les matériaux composites. Des mesures à l'aide de guides d'ondes (chap. 12 et 13) ou cavités résonnantes (chap. 15) sont particulièrement performantes.

Citons, enfin, le projet très ambitieux de Satellite de puissance solaire (S.P.S., *Solar Power Satellite*) *[9]* qui a pour but de placer en orbite une gigantesque station spatiale (20 000 tonnes) transformant l'énergie solaire en micro-ondes et la rayonnant vers la Terre grâce à un faisceau produit par une antenne de plus d'un kilomètre de diamètre.

Ce bref survol des principales applications des micro-ondes a laissé volontairement de côté des sujets que nous avons choisi de développer maintenant en raison de leur importance et de leur étroite relation avec des thèmes traités dans plusieurs chapitres de cet ouvrage ; il s'agit des lignes utilisées pour les télécommunications et les circuits (§ 1.3) et des transmissions en espace libre (§ 1.4).

1.3 LES LIGNES POUR LA TRANSMISSION ET LES CIRCUITS

Certaines de ces lignes servent pour les télécommunications terrestres : c'est le cas des lignes bifilaires, coaxiales et des fibres optiques ; d'autres, telles que les lignes à bandes sont très utilisées pour réaliser les composants passifs et le substrat des circuits électroniques micro-ondes ; enfin, les guides d'ondes métalliques trouvent toujours une place essentielle dans les techniques de mesure en laboratoire et dans la réalisation des circuits passifs. Nous étudierons ces diverses lignes et les guides dans le premier volume de cet ouvrage.

1.3.1 Les principaux types de lignes et de guides

a) La ligne bifilaire

Figure 1.
Ligne bifilaire.



La ligne bifilaire est historiquement le premier type de ligne qui a été utilisé pour les liaisons télégraphiques et téléphoniques. Ses deux conducteurs (fig. 1) étaient maintenus à distance constante au moyen de supports isolants régulièrement espacés. Avec deux conducteurs espacés de 20 cm environ et

l'air comme diélectrique, l'affaiblissement de ces lignes était très faible et permettait des liaisons de plusieurs dizaines de kilomètres sans amplification. Mais on ne pouvait transmettre avec une ligne qu'une seule communication téléphonique d'où une infrastructure très lourde dès qu'il fallait transmettre plusieurs dizaines de communications.

b) La ligne coaxiale

Cette ligne (fig. 2) est plus élaborée que la précédente car l'enveloppe extérieure qui sert de blindage pour le conducteur central joue aussi le rôle de conducteur de retour, en général mis à la terre. Ce conducteur est maintenu exactement dans l'axe du conducteur extérieur par un manchon cylindrique de diélectrique.

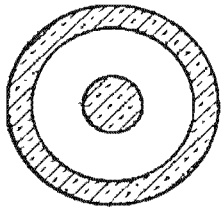


Figure 2.
Ligne coaxiale.

Les lignes coaxiales présentent des bandes passantes importantes, ce qui permet d'acheminer simultanément plusieurs centaines de communications téléphoniques préalablement échelonnées en fréquences, grâce au procédé de multiplexage.

L'affaiblissement présenté par cette ligne dépend de la qualité du diélectrique employé. L'amélioration des câbles coaxiaux a été rendue possible par l'élaboration d'excellents diélectriques dont le tableau ci-après donne les principales caractéristiques.

Nature du diélectrique	Constante diélectrique à 20 °C	Facteur de pertes à 20 °C
Polyéthylène	2,26 de 1 à 3 000 MHz	0,0002 à 1 MHz 0,0005 à 3 000 MHz
Chlorure de polyvinyle à 100 %	3,2 à 2,8 de 60 à 3 000 MHz	0,008 à 100 MHz 0,006 à 3 000 MHz
Polystyrène	2,56 de 60 à 3 000 MHz	0,0001 à 100 MHz 0,003 à 3 000 MHz
Polytétrafluoréthylène (Téflon)	2,1 de 60 à 3 000 MHz	0,002 à 100 MHz 0,00015 à 3 000 MHz

c) Les lignes à bandes et à fentes (*strip and slot lines*)

Les principaux types de lignes sont :

- La microbande (en anglais, *microstrip*) qui comporte un substrat en diélectrique complètement métallisé sur l'une de ses faces, et recouvert d'une bande métallique sur l'autre face (fig. 3a).

- La ligne à fente (en anglais, *slot line*) où les deux conducteurs formant la ligne, sont déposés sur la même face du substrat diélectrique (fig. 3b).
- La ligne coplanaire (en anglais, *coplanar waveguide*) qui présente trois bandes métalliques séparées par deux fentes d'un même côté du substrat (fig. 3c).

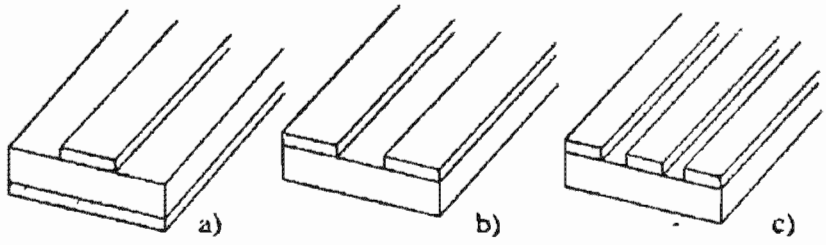


Figure 3.
a. Ligne microbande, *b.* Ligne à fente, *c.* Ligne coplanaire.

Ces lignes qui peuvent être fabriquées en mettant en œuvre la technique très précise et bon marché des circuits imprimés, se prêtent particulièrement bien à la réalisation et à la miniaturisation des circuits actifs micro-ondes pour les faibles puissances.

d) Les guides d'ondes métalliques

Ce sont des tuyaux métalliques, de section rectangulaire ou circulaire remplis, en général, par de l'air à la pression normale (fig. 4).

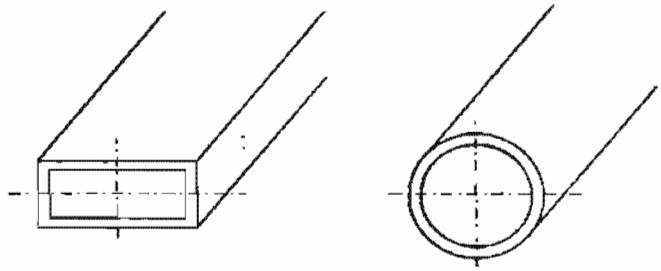


Figure 4.
Guides d'ondes métalliques à section rectangulaire et circulaire.

Comme leurs dimensions transversales sont de l'ordre de la longueur d'onde, ils ne sont utilisés qu'en micro-ondes entre 3 GHz et 90 GHz.

Leurs pertes sont très faibles car :

- ils utilisent comme diélectrique l'air, dont les propriétés isolantes sont remarquables,
- les conducteurs dont la section est relativement grande, causent de très faibles pertes par effet Joule, d'autant qu'il est possible de les dorer ou de les argenter intérieurement.

Leur construction est relativement facile et ils offrent aux ondes qu'ils transmettent un blindage total.

e) Les guides d'ondes diélectriques

La partie centrale de ces guides, appelée cœur, est un diélectrique complètement entouré par un autre diélectrique, appelé gaine, dont la permittivité diélectrique

est légèrement plus petite. La structure transversale est le plus souvent à symétrie de révolution (fig. 5).

La propagation des ondes s'effectue par réflexions successives à l'interface des deux diélectriques, de la même façon que dans les guides métalliques où il y a réflexion à l'interface diélectrique-métal.

C'est aux fréquences optiques que l'on trouve des diélectriques tels que la silice et ses dérivés, présentant des pertes très faibles, inférieures au décibel par kilomètre. D'où le nom de fibres optiques donné aux guides utilisés à ces fréquences.

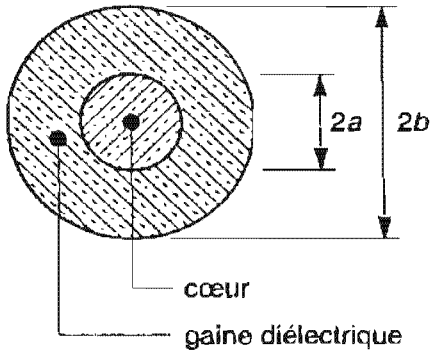


Figure 5.
Guide d'onde diélectrique.

Comme le diamètre du cœur va de quelques dizaines de microns dans les fibres dites multimodes, à quelques microns dans les fibres monomodes, on conçoit la difficulté de leur réalisation et de leurs raccordements. En contrepartie, les diélectriques qu'elles utilisent sont très abondants et bon marché.

1.3.2 Les câbles utilisés en télécommunications

a) Les câbles téléphoniques à lignes bifilaires

L'augmentation très rapide du nombre de liaisons téléphoniques a déterminé la réalisation de câbles regroupant des centaines de lignes bifilaires, appelées « paires » par les techniciens des télécommunications. C'est ainsi qu'ont été fabriqués des câbles urbains et inter-urbains à 182 paires (fig. 6) et à 1 792 paires. Ces paires sont groupées par deux, constituant ainsi une « quarte ». La ligne bifilaire élémentaire est constituée de conducteurs en fil de cuivre, de diamètre compris entre 0,5 et 2 mm, isolés par du papier sec ou du polyéthylène. Ces câbles peuvent être enterrés ou supportés par les poteaux téléphoniques existants lorsqu'ils ne sont pas trop gros.

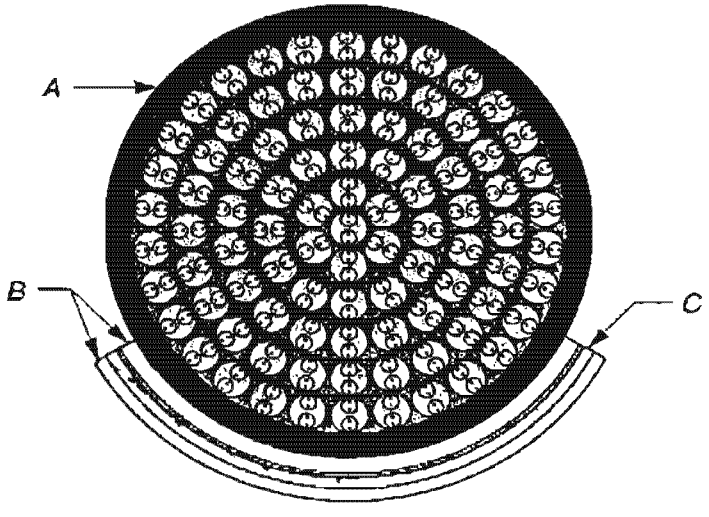


Figure 6.
Câble à 2 × 91 paires coaxiales, d'après *[10, page 12]*.

b) Les câbles téléphoniques à lignes coaxiales

Pour transmettre les bandes de fréquences de plusieurs MHz élaborées par le procédé de multiplexage, il faut une ligne dont l'affaiblissement par km soit relativement faible et ne varie pas trop avec la fréquence dans la bande considérée. Seule la ligne (ou « paire ») coaxiale répond à ces exigences.

Trois types de câbles à circuits coaxiaux sont utilisés en France :

- le câble 2,6/9,5 (fig. 7) qui comprend 4 paires coaxiales ayant chacune un conducteur intérieur de 2,6 mm et un conducteur extérieur de 9,5 mm. Sa bande passante maximale est de 12 MHz (soit 2 700 voies) ;
- le câble 1,2/4,4 (fig. 8) qui comprend de 4 à 28 paires coaxiales et qui a une bande passante maximale de 12 MHz (soit 2 700 voies) ;
- le câble 3,7/13,5 qui comprend de 4 à 10 paires coaxiales et qui a une bande passante maximale de 60 MHz (soit 10 800 voies).

Le pas d'amplification est de 4,5 km pour le premier câble et de 2 km pour les deux autres.

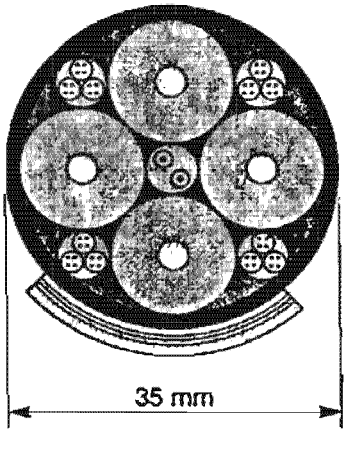


Figure 7. Câble interurbain à 4 paires coaxiales, 12 quartes en étoile et une paire centrale, d'après *[10, p. 12]*.

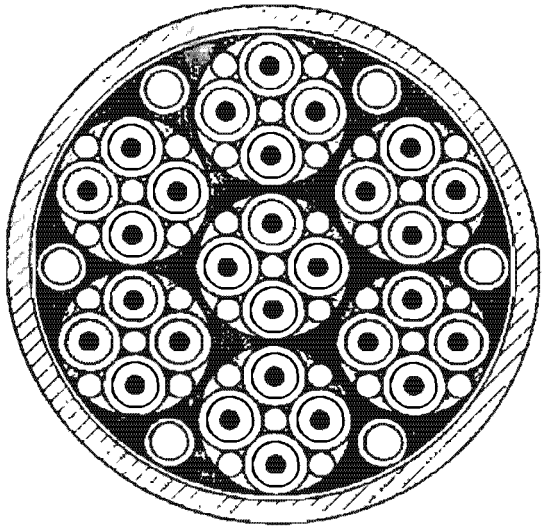


Figure 8. Câble à 28 paires coaxiales réparties en 7 torons de 4 paires chacun, d'après *[11, p. 139]*.

c) Les câbles téléphoniques à fibres optiques

Les fibres optiques sont de plus en plus utilisées pour les télécommunications. Parmi les diverses techniques utilisées pour l'élaboration de câbles réunissant plusieurs dizaines de fibres, nous décrirons la technique dite « à jonc cylindrique rainuré ».

Prenons l'exemple d'un câble à 70 fibres (fig. 9). Ce câble rassemble 7 joncs en plastique (fig. 9b) qui servent de support. Chaque jonc (fig. 9a) supporte 10 fibres qui sont déposées dans des rainures gravées à la surface du jonc. L'ensemble des joncs est protégé par une enveloppe en aluminium et une gaine plastique de 22 mm de diamètre. Le raccordement de deux tronçons de câble pose de délicats problèmes de connectique qui sont aujourd'hui bien résolus.

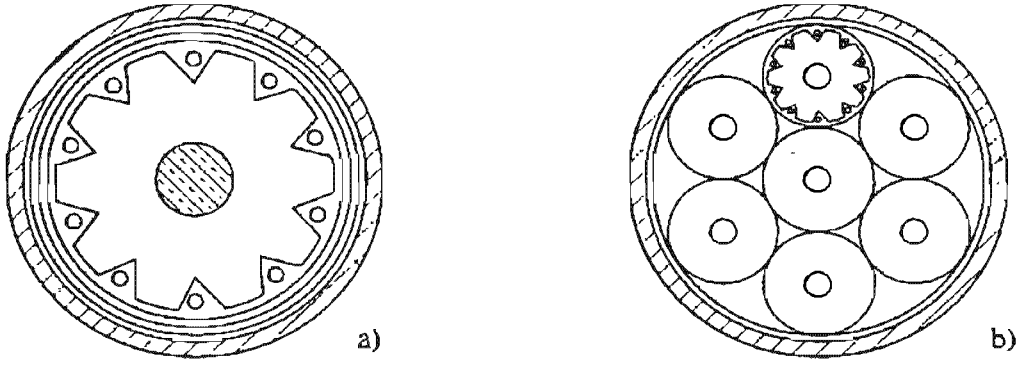


Figure 9.
Câble à fibres optiques,
a. Câble à 10 fibres,
b. Câble à 70 fibres,
d'après *[12, p. 1 024]*.

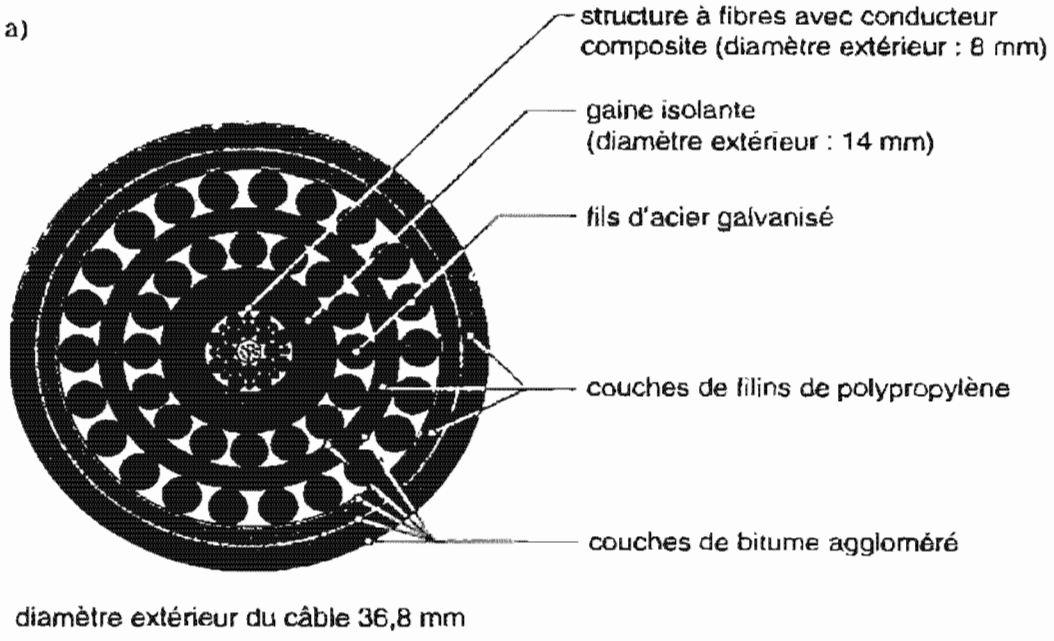
d) Les câbles sous-marins

Depuis les années 1960, les liaisons intercontinentales de télécommunications par câbles sous-marins ont concurrencé celles qui s'effectuent par satellite artificiel. Les deux systèmes se sont développés en présentant des performances techniques et des coûts d'exploitation à peu près comparables. Jusqu'en 1986, les câbles sous-marins utilisaient la technologie coaxiale, en modulation analogique. Le câble posé le plus performant fût le TAT 6 (TransAtlantique n° 6) qui permettait de transmettre 4 000 voies téléphoniques avec des répéteurs bidirectionnels espacés de 9,5 km.

Depuis 1986, les câbles sous-marins posés utilisent la technologie fibre optique monomode, en modulation numérique, qui offre une qualité de transmission et un nombre de voies bien supérieurs à ceux des câbles coaxiaux. En 1988 a été posé le câble TAT 8 constitué de deux paires de fibres par liaison, avec des répéteurs espacés de 60 km (affaiblissement de 0,35 dB/km). Chaque paire de fibres permet un débit numérique de 280 Mbit/s, correspondant à la transmission de 23 000 communications téléphoniques (ou l'équivalent, en transmission de données et en canaux de télévision). Le TAT 9, posé en 1991, offre un débit de 560 Mbit/s par paire de fibres avec des répéteurs espacés de 120 km (affaiblissement de 0,22 dB/km). La durée de vie prévue de ces systèmes est de 25 ans.

Les nouveaux systèmes TAT 12 (1995) et TAT 13 (1996) utiliseront deux câbles comportant chacun deux paires de fibres optiques dopées à l'erbium et des amplificateurs optiques distants de 45 km. Chaque paire de fibres pourra transmettre un débit de 2,5 Gbit/s. Les performances auront donc été multipliées par un facteur de 10 en 10 ans, ce qui est remarquable.

La mise en place de ces câbles pose de délicats problèmes. D'une part, ils sont soumis à des tractions très importantes lors de la pose, d'où la mise au point de structures spécifiques (câble à minitube en acier avec armature double – fig. 10). D'autre part, afin de les protéger des chaluts traînés par les bateaux de pêche jusqu'à de très grandes profondeurs (plus de 1 000 m), ils sont enfouis au fond d'une tranchée par une charrue sous-marine télécommandée depuis le navire câblier.



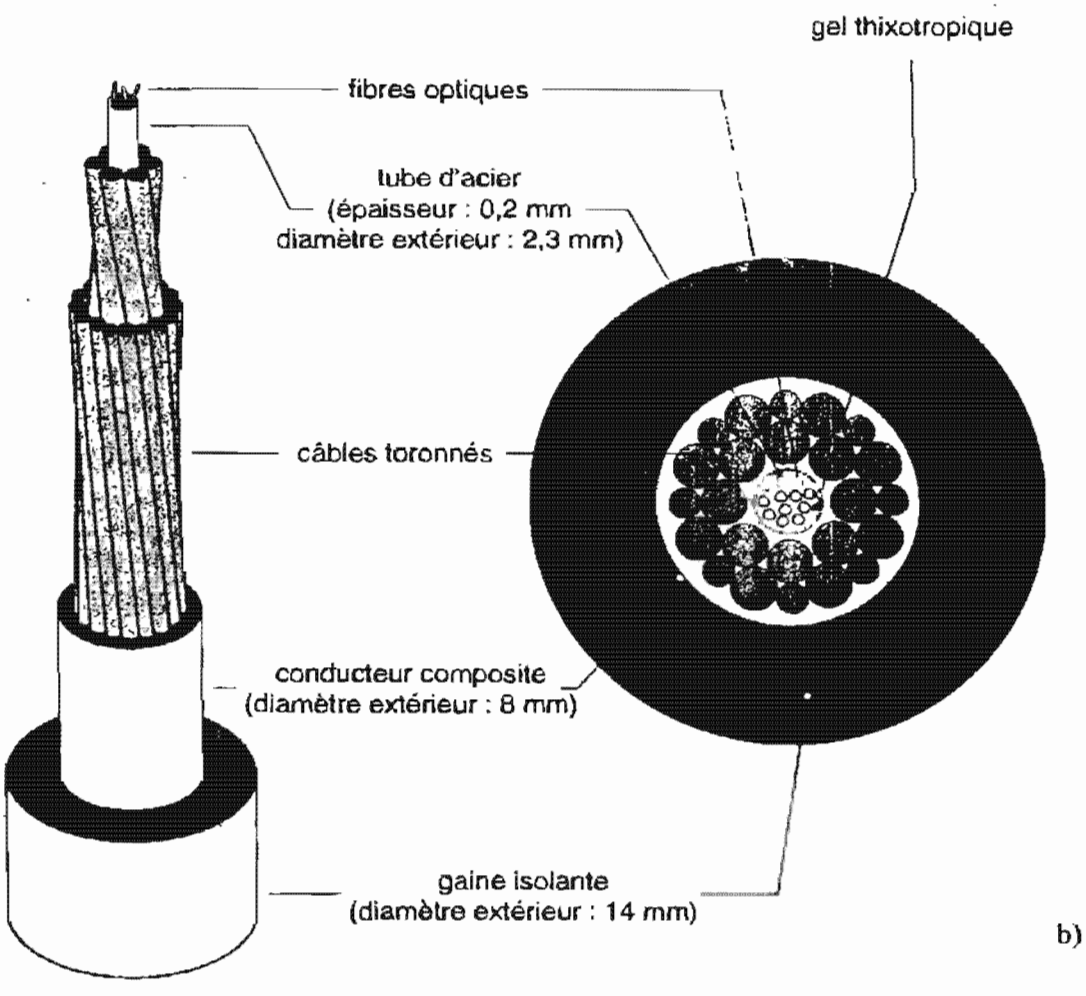


Figure 10.
a. Coupe transversale d'un câble à minitube en acier avec armure double,
b. Partie centrale (sans armure double) du câble, d'après *[13, p. 8]*.

1.4 LES SYSTÈMES TERRESTRES DE TRANSMISSION EN ESPACE LIBRE

1.4.1 Les télécommunications par faisceau hertzien *[14]*

a) Structure d'une liaison

Puisque le faisceau hertzien utilise la propagation des ondes, une liaison doit comporter dans chaque sens de transmission (fig. 11) :

- un émetteur E et un récepteur R,
- un modulateur M et un démodulateur D,
- des antennes.

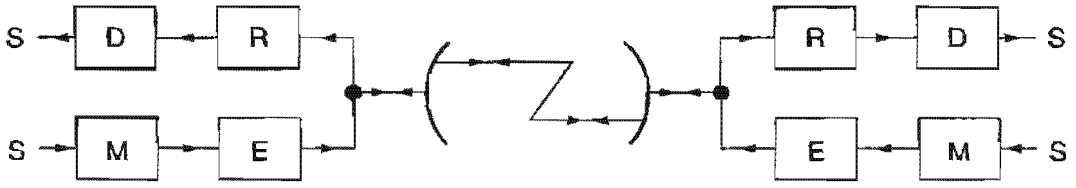


Figure 11. Schéma structurel d'une liaison hertzienne.

Le modulateur modifie les caractéristiques d'une onde électromagnétique pour lui faire porter l'information à transmettre. Le démodulateur effectue l'opération inverse : il doit fournir un signal S aussi semblable que possible à celui qui a été appliqué au modulateur.

L'émetteur produit une onde de puissance et de fréquence convenables pour qu'elle puisse transporter l'information à travers l'atmosphère. Le récepteur élabore, à partir de l'onde qu'il reçoit, un signal utilisable par le démodulateur.

Les antennes sont des dispositifs de couplage entre des lignes de transmission reliées à l'émetteur ou au récepteur et l'espace libre où se propage l'onde électromagnétique.

Si les deux points à relier sont suffisamment rapprochés (courbure de la Terre négligeable) et dégagés pour que les antennes soient en visibilité directe, la liaison peut être établie en un seul bond.

En revanche, si la distance entre les deux points est trop grande, la liaison doit être établie en plusieurs bonds en utilisant des stations relais (fig. 12) qui amplifient les ondes reçues avant de les réémettre.

Mais dans le cas de régions montagneuses où un obstacle s'interpose entre deux stations rapprochées, il est possible d'utiliser un relais passif constitué par un réflecteur plan, en visibilité directe de chacune des stations (fig. 13).

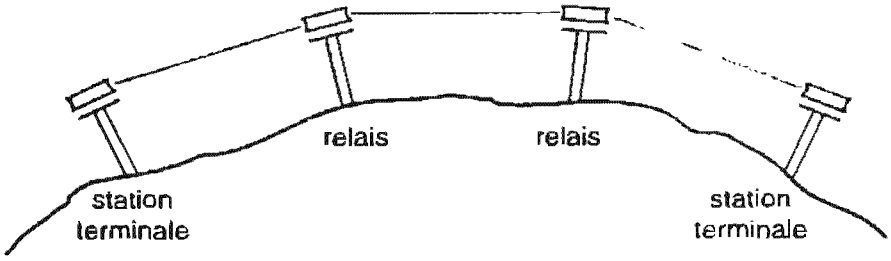


Figure 12. Liaison hertzienne en plusieurs bonds avec relais.

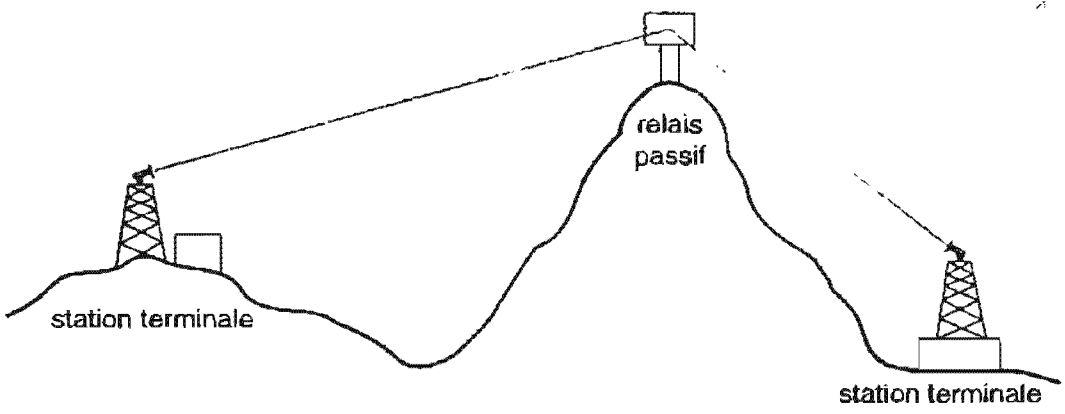


Figure 13. Liaison hertzienne avec un relais passif.

b) Modulations utilisées

Pour le faisceau hertzien, l'affaiblissement de l'onde porteuse en cours de propagation est sujet à des fluctuations. D'autre part, certains éléments de la chaîne micro-onde ont une réponse non linéaire en amplitude. Toutes ces causes de distorsions d'amplitude de l'onde porteuse font que la modulation d'amplitude n'est pas souhaitable pour les liaisons hertziennes.

La modulation angulaire, en revanche, est très peu sensible aux conditions de propagation et aux réponses non linéaires en amplitude des équipements. Elle offre en outre, une bonne protection contre le bruit et la plupart des brouillages qui n'affectent que l'amplitude de la porteuse.

C'est la raison pour laquelle la très grande majorité des faisceaux hertziens analogiques utilise la modulation angulaire. Ils sont employés pour transmettre :

- des multiplex analogiques de téléphonie dont la capacité peut aller jusqu'à 2 700 voies téléphoniques,
- du télex ou des transmissions de données à moyenne et grande vitesse,
- les signaux vidéo de la télévision.

En modulation numérique, les faisceaux hertziens présentent, dans des conditions normales de propagation, une qualité presque parfaite puisque l'on sait qu'à rapport signal/bruit identique les modulations numériques permettent une meilleure régénération du signal que les modulations analogiques. Mais si les conditions de propagation viennent à se dégrader, la régénération du signal n'est plus possible, en modulation numérique, dès que le rapport signal/bruit tombe en dessous d'un certain seuil alors que la réception est encore possible en modulation analogique.

Les faisceaux hertziens numériques servent à transmettre :

- des multiplex numériques de téléphonie dont le débit peut aller jusqu'à 140 Mbit/s,
- des données numériques à grandes vitesses,
- du visiophone et de la télévision codée.

1.4.2 Les radiocommunications avec les mobiles

a) Description du système

Les systèmes de radiocommunication avec les mobiles sont en plein développement *[15]*. Ils permettent à un abonné d'appeler ou d'être appelé au téléphone. Cet appel s'effectue par l'intermédiaire d'une station de base qui est un émetteur-récepteur muni d'une antenne assurant la couverture d'une zone ou cellule. Une région géographique relativement étendue peut ainsi être couverte par un réseau multicellulaire de plusieurs stations, où une fréquence spécifique est utilisée pour chaque cellule du réseau.

Il existe, par exemple, des réseaux à 7 fréquences (fig. 14). Cet ensemble de fréquences peut être réutilisé en dehors de la région couverte par le réseau multicellulaire. Évidemment, la puissance de chaque émetteur doit rester moyenne (< 10 watts) pour que sa portée ne déborde pas des limites du réseau, tout en restant suffisamment efficace à l'intérieur de la cellule desservie.

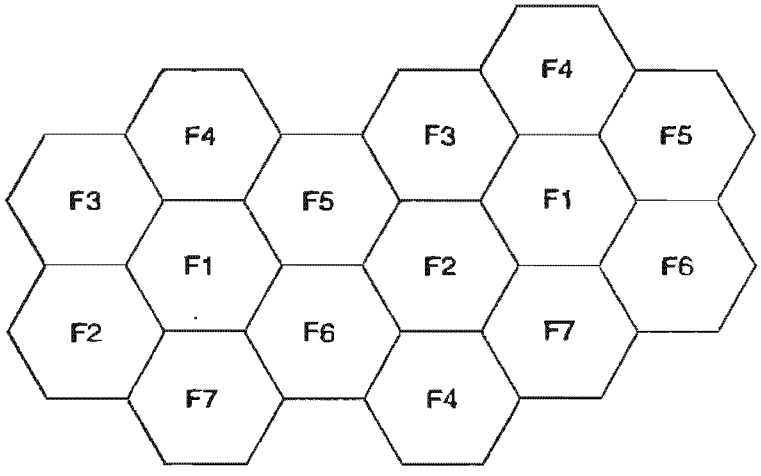


Figure 14. Exemple de réutilisation des fréquences d'un réseau multicellulaire à 7 fréquences.

Lorsque l'utilisateur se déplace, sa communication téléphonique est traitée par la station de base du réseau grâce à laquelle le bilan de la liaison est le plus favorable. La taille d'une cellule élémentaire desservie par une station de base, est d'un diamètre de 10 km environ. Dans des cas bien précis – en zone urbaine où la propagation des ondes est plus difficile et où les mobiles se déplacent plus lentement – il est envisagé de réaliser des réseaux microcellulaires où le diamètre d'une cellule élémentaire est de 1 km environ.

Il apparaît donc qu'au prix de l'implantation d'un nombre suffisant de stations de base, il est possible d'assurer la couverture de régions étendues. Évidemment, ce sont les zones à forte densité de population et les axes autoroutiers que les sociétés de radiotéléphonie équipent en priorité. Les antennes utilisées sur les pylônes des stations de base sont du type dipôles (vol. 2, chap. 11 « Les dipôles rayonnants ») et la connaissance de la propagation des ondes (vol. 2, chap. 7 « Influence de la Terre et de l'atmosphère sur la propagation des ondes ») est essentielle pour faire des prévisions de couverture radioélectrique.

Les stations mobiles sont de trois types :

- les stations montées dans les véhicules, avec antenne à l'extérieur du véhicule,
- les stations portables avec antenne amovible, qui peuvent être portées à la main ou montées dans un véhicule,
- les stations portatives avec antenne liée au bloc émetteur-récepteur (masse ≈ 500 g, volume ≈ 500 cm^3, autonomie de 24 heures en veille et de 2 à 3 heures en communication).

b) Les divers systèmes existants

Au cours des années 1980, le développement des systèmes de radiocommunication analogique s'est effectué d'une manière assez diverse d'un pays à l'autre.

- Les États-Unis et le Canada ont développé d'une manière unifiée le système AMPS (10 millions d'abonnés) dans la bande des 800 MHz.
- Le Royaume-Uni, l'Italie, l'Espagne et l'Autriche ont adopté le système TACS, dérivé de l'AMPS, qui opère dans la bande des 900 MHz.
- Le système NMT 900, également dans la bande des 900 MHz, s'est développé d'abord en Scandinavie et ensuite en Suisse, aux Pays-Bas, en Espagne et en France.
- L'Allemagne a adopté le système C-NETZ et l'Italie le système RTMS, tous deux dans la bande des 450 MHz.
- En France, Matra a développé le réseau Radiocom 2000 dans les bandes 174-223 MHz et 400-430 MHz.

Comme on le voit, l'Europe a adopté, sans aucune concertation, des systèmes différents. Heureusement, depuis une dizaine d'années (1987), une norme européenne a été définie : le GSM (*Global System for Mobile Communications*) qui est un système numérique opérant entre 890 et 915 MHz pour l'émission des mobiles (voie montante) et entre 935 et 960 MHz pour l'émission des stations fixes (voie descendante). Cette norme se développe en France sous l'impulsion de deux opérateurs : la SFR (Société Française de Radiotéléphonie) et France Télécom (Réseau Itinéris).

Un système complémentaire, le DCS 1800 est en cours de définition en vue d'une utilisation en milieu urbain à des fréquences voisines de 1 800 MHz et pour des portées réduites de l'ordre de quelques kilomètres au maximum.

1.5 LES SYSTÈMES SPATIAUX DE TRANSMISSION EN ESPACE LIBRE *[16, 17, 18]*

1.5.1 Les divers types de liaisons par satellites artificiels

Ces liaisons qui utilisent les micro-ondes, servent à satisfaire des besoins de plus en plus importants, tels que :

- les télécommunications avec des stations fixes ou mobiles,
- la radiodiffusion,
- la radiolocalisation et la radionavigation,
- les liaisons avec les sondes spatiales,
- l'observation de la Terre.

a) Les télécommunications

Le service fixe de télécommunications assure des liaisons entre stations fixes pour la transmission :

- de communications téléphoniques,
- de messages sous forme de télécopie de textes,
- de données numériques à haut débit pour la télématique,
- de signaux audio et vidéo pour les téléconférences,
- de canaux de télévision pour les échanges internationaux d'émissions.

Les satellites qui assurent ce genre de liaisons sont principalement les satellites géostationnaires Intelsat au niveau international, Eutelsat au niveau européen ainsi que des satellites nationaux comme, par exemple, Telecom en France. Le tableau de la page suivante donne les principales caractéristiques de ces satellites.

Le service mobile de télécommunications assure des liaisons entre deux stations mobiles ou entre une station fixe et une mobile, par l'intermédiaire d'un satellite assurant le relais. Ce service s'est d'abord développé pour les liaisons maritimes grâce aux satellites géostationnaires Inmarsat ; il s'est progressivement étendu aux liaisons aériennes.

b) La radiodiffusion

La radiodiffusion par satellite permet, depuis un satellite géostationnaire émettant une forte puissance (200 à 250 W), de diffuser des émissions de TV ou de radio FM pouvant être directement captées par un usager équipé d'un système

Caractéristiques de quelques satellites						
Type	**Année**	**Masse (kg)[1]**	**Voies tél. + TV ou débit num.**	**Puissance (W)[2]**	**Durée de vie**	**Bandes de F. (GHz)[3]**
Intelsat 6	1989	4 200	40 000 + 2 TV	5 000	10 ans	6/4 et 14/11
Intelsat 7	1995	3 600	60 000 + 3 TV	3 900	12 ans	6/4 et 14,2/11,1 ; 11,6 ; 11,8 ; 12,6
Eutelsat 1	1983	600	2 000 + 8 TV	300	7 ans	14/11 et 14/12
Eutelsat 2	1990	900	8 000 + 16 TV	800	7-10 ans	14 à 14,5/11 à 12,75
Telecom 1	1984	700	2 500 + 2 TV	200	7 ans	6/4 et 14/12
Telecom 2	1991	1 500	5 200 + 4 TV	600	10 ans	6/4 et 14/12
TDF 1/2	1988	1 300	5 TV	1 000	8-9 ans	17,3 à 18,1/11,7 à 12,5

1. Il s'agit de la masse du satellite en orbite.
2. Il s'agit de la puissance radiofréquence.
3. Le premier chiffre (le plus élevé) correspond à la fréquence dans le sens montant / le second chiffre (le plus faible) à la fréquence dans le sens descendant.

de réception constitué d'une antenne paraboloïdale de 40 à 50 cm de diamètre et d'un récepteur hyperfréquence à faible bruit. En Europe, plusieurs satellites de radiodiffusion sont en fonctionnement, notamment TV-SAT pour l'Allemagne et TDF pour la France (voir le tableau). Leurs programmes sont diffusés selon la norme haute définition D2 Mac Paquet qui donne une image excellente et un son haute fidélité. Des satellites de télécommunications comme Intelsat VI ou Eutelsat I diffusent aussi des émissions de TV, mais avec une puissance plus réduite (20 à 40 W), ce qui nécessite une antenne de réception de 1,50 m de diamètre.

c) La radiolocalisation et la radionavigation

La radiolocalisation des mobiles à la surface de la Terre est possible grâce aux satellites à défilement placés en orbites basses (850 ou 1 000 km) quasipolaires du système international de détresse et de sécurité Sarsat (États-Unis), Cospars (URSS). Ces satellites captent les signaux émis à 121,5 MHz ou à 406 MHz (nouveau système) par des balises activées manuellement ou automatiquement en cas de détresse. Il existe divers types de balises : maritimes (par exemple ARGOS), aéronautiques ou terrestres. La densité actuelle des stations sol et le nombre de satellites de ce système permettent d'alerter les services de sauvetage en une heure, en moyenne, et avec une précision de quelques kilomètres.

Il existe aussi des services commerciaux de radiorepérage par satellites autorisant l'échange de brefs messages tels que les systèmes Locstar en Europe et Geostar aux États-Unis. La précision de ces systèmes (de l'ordre de 100 m), la légèreté des terminaux à bord des mobiles (antenne de 10 cm) sont particulièrement intéressants pour les transports terrestres de marchandises ou de passagers par la route ou par le rail.

La radionavigation est assurée par les satellites GPS (*Global Positionning System*). Il s'agit d'une constellation de 24 satellites lancés entre 1983 et 1993, qui effectuent un tour de la Terre en 12 heures à une altitude de 20 185 km. Ils sont regroupés par 4, régulièrement répartis dans 6 plans orbitaux. Chaque satellite émet deux fréquences, l'une à 1 575 MHz et l'autre à 1 227 MHz, qui sont porteuses de signaux codés occupant des bandes de fréquence de 20 MHz. En service payant, les précisions obtenues sont de 21 m en position horizontale et de 34 m en position verticale ; elles sont multipliées par cinq en service gratuit. Les antennes de réception sont miniaturisées (Micro-ondes, vol. 2, chap. 15 « Les antennes à éléments imprimés »).

d) Les liaisons avec les sondes spatiales

Grâce à ces liaisons, qui se situent en bande X, il est possible de communiquer avec des sondes explorant notre système solaire et qui se trouvent à des distances de centaines de millions voire de milliards de kilomètres. Citons notamment :

- les sondes soviétiques Venera et les sondes américaines Mariner et Pioneer, pour l'exploration de Vénus ;
- les sondes soviétiques Mars et Phobos et les sondes américaines Mariner et Viking, pour l'exploration de Mars ;
- les sondes américaines Pioneer 10 et 11 et Voyager 1 et 2, pour l'exploration de Jupiter et Saturne ;
- la sonde Voyager 2 qui, après avoir survolé Jupiter le 9 juillet 1979 et Saturne le 26 août 1981 survola Uranus le 24 janvier 1986 et Neptune le 24 août 1989, transmettant des images d'une qualité remarquable et d'un intérêt inestimable pour la connaissance du système solaire ;
- la sonde Giotto qui a transmis le 13 mars 1986 les images de sa rencontre avec la comète Halley.

Actuellement, la sonde spatiale Galilée fait route vers Jupiter qu'elle devrait atteindre en décembre 1995. En 1997 sera lancée la sonde spatiale Cassini qui devrait atteindre Saturne et son satellite Titan en 2004.

e) L'observation de la Terre

Ces applications se sont notamment développées depuis le début des années 1980 :

- Satellites météorologiques comme Météosat (1977-1981 et 1989) suivis par les MOP lancés en 1989, 1990 et 1993 ;

- Satellites d'observation des océans comme Topex-Poseïdon (1992) qui permet de mieux connaître les courants océaniques, la position des glaces polaires, l'état de la mer et de mesurer le niveau des surfaces marines avec une précision de 2 à 4 cm !
- Satellites photographiant la surface de la Terre, comme SPOT qui fournit des images de surfaces de 60×60 km^2 avec une résolution de 10 m ou comme le satellite militaire Hélios (1995) dont la résolution serait de 1 m ;
- Satellites de télédétection passive (à l'aide de radiomètres) ou active (à l'aide de radars) comme ERS-1 (1991). Celui-ci permet d'étudier l'évolution des zones agricoles, des forêts, des calottes polaires. Il peut mesurer la température et le niveau de la surface des océans, la hauteur des vagues, la vapeur d'eau atmosphérique. Comme il est doté d'instruments qui fonctionnent en micro-ondes (radiomètre, radar) il observe même la nuit et à travers une couverture nuageuse, voire des précipitations.

1.5.2 Organisation des liaisons par satellites

Les satellites artificiels sont les points centraux d'un réseau de liaisons qui s'effectuent en micro-ondes. Les éléments essentiels en sont les antennes et les circuits passifs (répéteurs) que l'on trouve tant au niveau des stations terriennes que du satellite lui-même. Ces antennes et ces circuits passifs seront étudiés dans le second volume de cet ouvrage, ainsi que le bilan de la liaison satellite-Terre.

a) Liaisons de télécommunications

Le satellite doit permettre la liaison simultanée entre plusieurs couples de stations à la surface de la Terre (fig. 15). Le répéteur du satellite assure l'amplification et la régénération des signaux.

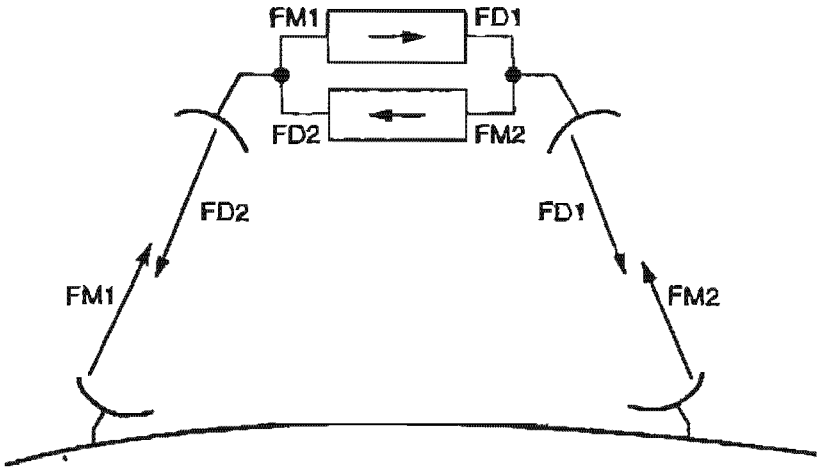


Figure 15. Organisation d'une liaison de télécommunications par satellite.

La capacité d'un répéteur (1 000 voies téléphoniques pour une largeur de bande de 36 MHz sur Intelsat ou Eutelsat) permet d'écouler le trafic entre plusieurs

couples de stations, à condition d'utiliser une technique d'accès multiple pour répartir :

- en fréquence, des liaisons se faisant simultanément (Accès Multiple par Répartition en Fréquence, AMRF ; en anglais : *Frequency Division Multiple Access, FDMA*) ;
- dans le temps, des liaisons se faisant dans la même bande de fréquences (Accès Multiple par Répartition dans le Temps, AMRT ; en anglais : *Time Division Multiple Access, TDMA*).

Notons aussi qu'une combinaison judicieuse de l'utilisation des deux types d'accès (Accès Multiple par Répartition Codée en temps et en fréquence, AMRC ; en anglais : *Code Division Multiple Access, CDMA*) permet d'utiliser, au mieux, la capacité des répéteurs du satellite.

Les antennes utilisées sont des réflecteurs (vol. 2, chap. 13 « Les antennes à réflecteur ») alimentés par un réseau de sources primaires. Leur rayonnement qui est à faisceaux multiples ou à faisceau conformé, permet de s'adapter au mieux au type de couverture qui doit être assuré.

b) Liaisons de radiodiffusion (fig. 16)

Les émissions à transmettre sont envoyées vers le satellite depuis la station d'émission T_1. D'autres signaux de télémesure et de télécommande sont envoyés par une station de contrôle opérationnel.

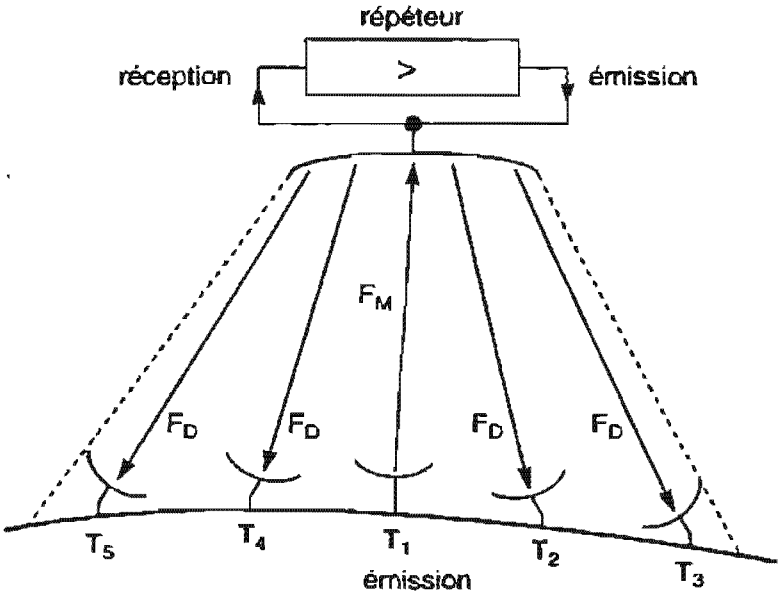


Figure 16. Organisation d'une liaison de radiodiffusion par satellite.

Après traitement (amplification et changement de fréquence) par le ou les répéteurs, les émissions destinées au grand public sont rayonnées vers la Terre par une antenne qui assure la couverture de la zone à desservir. Cette couverture peut être obtenue soit par un faisceau à découpe circulaire ou elliptique, engendré par une antenne à réflecteur alimenté par une source primaire unique,

soit par un faisceau conformé, engendré par une antenne à réflecteur alimenté par un réseau de plusieurs sources primaires.

Des bandes de fréquences ont été attribuées aux divers systèmes de radiodiffusion. Chaque bande de fréquence est partagée en un certain nombre de canaux, chaque canal étant réservé à un programme de TV ou de radio FM. Par exemple, la bande 11,7-12,5 GHz a été partagée en 20 canaux émis en polarisation circulaire gauche et 20 autres en polarisation circulaire droite. Les fréquences centrales de deux canaux émis dans la même polarisation sont séparées de 40 MHz environ et celles de deux canaux émis en polarisations orthogonales sont séparées de 20 MHz environ. En Europe, chacun des 8 pays utilisateurs de cette bande s'est vu allouer 5 canaux.

Le satellite d'un pays utilisateur (tel que TDF1 pour la France ou TVSAT pour l'Allemagne) va donc émettre ces 5 canaux sur sa zone de couverture. Ce satellite a 5 répéteurs qui amplifient chacun 1 canal. Un multiplexeur d'émission permet de rassembler ces canaux, sans les mélanger, pour les envoyer vers l'antenne d'émission.

1.6 ATTRIBUTION DES BANDES DE FRÉQUENCES MICRO-ONDES

À partir de 100 MHz (λ_0 = 3 m)

Les principales attributions légalisées en France sont les suivantes :

- la radiodiffusion FM (Bande II) de 87,5 à 108 MHz ;
- la radionavigation pour l'aviation civile : ILS de 108 à 112 MHz et VOR de 112 à 118 MHz ;
- les radioamateurs de 144 à 148 MHz ;
- la radiodiffusion TV (Bande III) et les radiocommunications avec les mobiles terrestres de 174 à 223 MHz ;
- la radionavigation pour l'aviation civile : ILS de 328 à 335 MHz ;
- la radiodiffusion TV (Bandes IV et V) de 470 à 830 MHz ;
- les radiocommunications avec les mobiles terrestres (système GSM) de 890 à 960 MHz ;
- la radionavigation pour l'aviation civile et les armées (DME, Tacan, Radar) de 960 à 1 260 MHz et de 1 260 à 1 350 MHz ;
- la radioastronomie de 1 400 à 1 427 MHz ;
- les liaisons mobiles pour les reportages TV : 1 429-1 452 MHz, 1 460-1 484 MHz et 1 492-1 515 MHz ;

- la radionavigation (système GPS) de 1 217 à 1237 MHz et de 1 565 à 1 585 MHz ;
- les télécommunications par satellite avec les mobiles (bateaux ou avions) via le système Inmarsat de 1 530 à 1 544 MHz (liaison descendante) et 1 626 à 1 645 MHz (liaison montante) ;
- les radiocommunications avec les mobiles autour de 1 800 MHz ;
- les faisceaux hertziens de 2 100 à 2 300 MHz ;
- le chauffage industriel et domestique (fours à micro-ondes) à 2 450 MHz ;
- la radionavigation pour l'aéronautique de 2 700 à 2 900 MHz.

Au-delà de 3 GHz (λ_0 = 10 cm)

Les micro-ondes sont surtout utilisées pour les télécommunications par faisceaux hertziens et par satellites artificiels ainsi que pour l'aviation civile.

- Les principales bandes utilisées pour les faisceaux hertziens sont les suivantes : 3,8 à 4,2 GHz ; 4,4 à 4,99 GHz (armées) ; 5,4 à 7,1 GHz ; 7,4 à 7,9 GHz (armées) ; 8,2 à 8,5 GHz ; 10,7 à 11,7 GHz ; 12,7 à 13,2 GHz ; 14,4 à 15,35 GHz ; 17,7 à 19,7 GHz.
- Les principales bandes utilisées pour l'aviation civile sont : 4,2 à 4,4 GHz (systèmes d'altimétrie); 5 à 5,1 GHz (MLS, *microwave landing system*) ; 5,35 à 5,47 GHz (radars de bord).
- Les principales bandes utilisées pour les liaisons par satellite (Région I) sont les suivantes :
 - de 3,4 à 4,2 et de 5,725 à 7,075 GHz pour les télécommunications civiles,
 - de 7,25 à 7,75 et de 7,9 à 8,4 GHz pour les télécommunications militaires,
 - de 10,7 à 11,7 GHz pour les télécommunications civiles et la radiodiffusion,
 - de 11,7 à 12,7 GHz et de 14 à 14,8 GHz pour la radiodiffusion,
 - de 17,3 à 19,7 GHz pour les télécommunications civiles.

 Comme on le remarque, certaines de ces bandes sont utilisées en partage avec les faisceaux hertziens, selon des conventions d'exploitation très précises.

Au-delà de 20 GHz (λ_0 = 1,5 cm)

Les bandes de fréquences ne sont pas encore définitivement attribuées. Des recherches sont en cours pour l'utilisation de ces fréquences, en dehors des raies d'absorption de la vapeur d'eau (vers les 22 GHz).

1re partie

LIGNES POUR LA TRANSMISSION ET LES CIRCUITS

Chapitre 2

Propagation sur une ligne en haute fréquence

2.1 Modélisation de la ligne

2.1.1 Le modèle

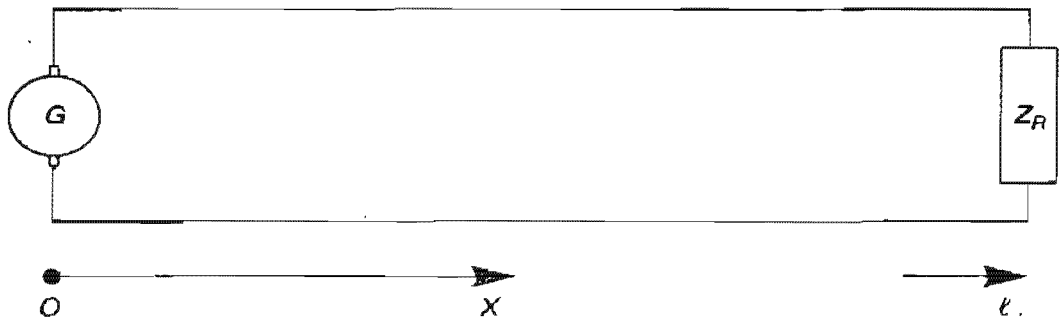


Figure 1.
Ligne de longueur ℓ.
G, générateur ;
Z_R, impédance de charge.

Soit une ligne de transmission, de longueur ℓ, alimentée à une extrémité par un générateur de tensions H.F. et fermée à l'autre extrémité sur une impédance Z_R (fig. 1). En haute fréquence, du fait que la longueur de la ligne est, en général, grande devant la longueur d'onde λ, il en résulte que la tension et le courant (ou les champs électrique et magnétique, si les précédents concepts ne peuvent pas être utilisés) varient le long de la ligne.

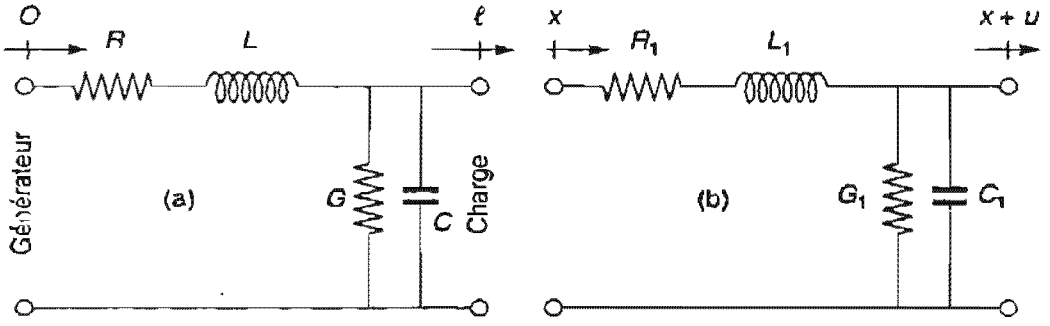


Figure 2. Modélisation par un quadripôle *a.* de la ligne *b.* d'un tronçon de ligne de longueur unité.

Pour faire l'étude de ces phénomènes, il convient d'adopter une modélisation de la ligne. Le modèle utilisé est un réseau (fig. 2) qui comporte :

- en série, une résistance R et une inductance L, pour représenter respectivement les pertes d'énergie active et réactive dans les conducteurs de la ligne,
- en parallèle, une conductance G et une capacité C pour représenter les pertes d'énergie active et réactive dans le diélectrique de la ligne.

En haute fréquence, la difficulté du problème vient de ce qu'il est impossible – du moins dès que la ligne n'est pas de longueur très faible devant λ – de la modéliser par un seul quadripôle (fig. 2a) que l'on pourrait considérer comme fermé à une extrémité sur le générateur et à l'autre sur la charge. Il faut alors faire l'approximation qui revient à décomposer la ligne en une suite d'éléments identiques, l'élément unité étant pris très petit devant λ pour qu'on puisse le représenter avec une erreur négligeable par le quadripôle à constantes localisées de la figure 2b. R_1, L_1, G_1, C_1 représentent respectivement la résistance, l'inductance, la conductance et la capacité réparties de cet élément unité.

2.1.2 Domaine de validité

R_1, L_1, G_1, C_1 sont appelées les constantes ou paramètres primaires de la ligne. Les seules lignes pour lesquelles il sera possible de les calculer sans difficulté, sont les lignes dites T.E.M. où les notions de tension et courant gardent un sens. Sur ces lignes, en effet, les champs E et H se trouvent dans des plans perpendiculaires aux conducteurs (d'où l'appellation T.E.M. = *Transversal Electric and Magnetic fields*) et il est donc possible d'en déduire les tension et courant. Les lignes coaxiales, bifilaires et triplaques en sont de bons exemples (voir chapitres 1, 8 et 9).

Par contre, dès que les champs ont une composante longitudinale (c'est-à-dire dans la direction des conducteurs), la notion de tension n'a plus de sens et les constantes primaires ne peuvent plus être calculées directement. C'est le cas pour les guides d'ondes métalliques ou diélectriques ainsi que pour les lignes microbandes, encore que, dans ce dernier cas, il soit possible de faire des approximations du type T.E.M.

Par ailleurs, il est très important de noter, dès maintenant, que l'étude qui sera faite dans ce chapitre et les suivants est spécifique dans ses détails, mais néanmoins générale dans ses conclusions. En effet, les équations que nous écrirons, les relations que nous établirons en appliquant les concepts tension et courant au modèle décrit au paragraphe 2.1.1, ne sont valables dans leur forme et dans le détail des calculs que pour les lignes de type TEM. Cependant, tout ce qui sera exposé dans ces chapitres concernant la nature et les caractéristiques des régimes de propagation, le diagramme de Smith, le problème de l'adaptation, les régimes impulsionnels, est également valable pour d'autres types de lignes comme les guides d'ondes.

2.1.3 Intérêt de ce modèle

Il provient de ce que, à propos d'une étude particulière aux lignes bifilaires et coaxiales à l'aide des concepts tension-courant et du modèle (R_l, L_l, G_l, C_l), nous établirons des résultats et expliquerons des phénomènes que l'on pourrait trouver pour les guides d'ondes, par exemple, en utilisant les concepts de champ électrique et magnétique.

Il faut d'ailleurs noter que les lignes T.E.M. pourraient aussi être considérées et étudiées comme des guides d'ondes électromagnétiques, les champs se propageant dans le diélectrique où les conducteurs sont plongés. Ce fut le point de vue des premiers théoriciens de la radio-électricité (Hertz et Poincaré notamment). Malheureusement, l'exposé de cette méthode est assez ardu et peu explicite tandis que l'utilisation des concepts tension et courant permet, tout en restant correct, de donner un exposé simple et significatif.

2.2 ÉQUATION DE PROPAGATION

Nous étudions une ligne de transmission, de longueur ℓ, alimentée, à une extrémité, par un générateur de tensions H.F. et fermée, à l'autre extrémité, sur une impédance Z_R (fig. 1). Pour les applications, l'origine des abscisses sera prise soit au générateur, soit à la charge, soit en un point de la ligne où se trouve une discontinuité à étudier. Si l'origine est au générateur (à la charge), l'axe des abscisses est orienté vers la charge (le générateur) afin qu'un point de la ligne ait toujours une abscisse positive. Pour ce chapitre, nous supposerons que l'axe est orienté du générateur vers la charge avec origine au générateur.

Nous allons traiter le cas général d'une ligne avec pertes. Plaçons-nous en un point d'abscisse x par rapport à l'origine et raisonnons sur l'élément compris entre x et $x + dx$ (fig. 3). Soient $\underline{v}(x, t)$ et $\underline{i}(x, t)$ les valeurs complexes instantanées de la tension et du courant au point d'abscisse x.

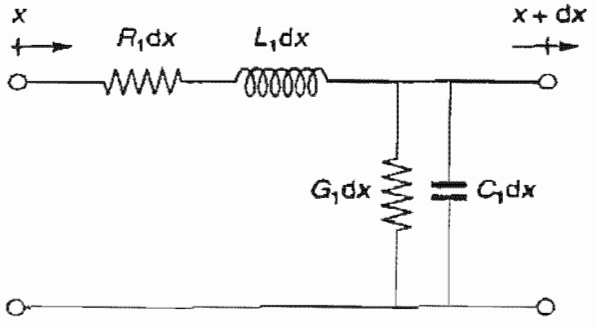


Figure 3. Représentation quadripolaire d'un tronçon de ligne de longueur dx.

Grâce à l'utilisation de la notation complexe, il est possible d'écrire que les valeurs instantanées complexes de la tension $\underline{v}(x, t)$ et du courant $\underline{i}(x, t)$ sont le produit des amplitudes complexes $\underline{V}(x)$ et $\underline{I}(x)$, qui ne dépendent que de la variable spatiale x, par la fonction $\underline{F}(t)$ représentant les variations dans le temps. En régime sinusoïdal : $\underline{F}(t) = e^{j\omega t}$; nous avons donc :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}(x)\, e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{V}(x) = V(x)\, e^{j\varphi_v(x)}$$
$$\underline{i}(x, t) = \underline{I}(x)\, e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I}(x) = I(x)\, e^{j\varphi_i(x)}$$

$V(x)$ et $I(x)$ sont les amplitudes réelles ou modules.

$\varphi_v(x)$ et $\varphi_i(x)$ sont les phases.

Les valeurs instantanées réelles sont :

$$v(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{v}(x, t)] = V(x) \cos[\omega t + \varphi_v(x)]$$
$$i(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{i}(x, t)] = I(x) \cos[\omega t + \varphi_i(x)]$$

En notation réelle, les variables t et x sont liées dans la fonction cosinus et ne peuvent être séparées. C'est pourquoi il est plus intéressant d'utiliser la notation complexe dans laquelle la dépendance temporelle $\underline{F}(t) = e^{j\omega t}$ peut être mise en facteur.

La variation de tension $d\underline{v}$ quand on se déplace de dx sur la ligne est égale à la somme :

- de la variation de tension $-R_1\, dx\, \underline{i}$ due à la résistance ;
- de la variation de tension $-L_1\, dx\, (\partial \underline{i}/\partial t)$ due à l'inductance.

Soit :
$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial x} = -R_1\, \underline{i} - L_1 \frac{\partial \underline{i}}{\partial t} \qquad (1)$$

La variation d'intensité de courant $d\underline{i}$ quand on se déplace de dx sur la ligne est égale à la somme :

- du courant s'écoulant par défaut d'isolement $-G_1\, dx\, \underline{v}$;
- du courant s'écoulant par la capacité $-C_1\, dx\, (\partial \underline{v}/\partial t)$,

NB
Le signe – provient de ce qu'il s'agit de chutes de tension et de pertes de courant.

Soit :
$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial x} = -G_1\, \underline{v} - C_1 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \qquad (2)$$

À partir de (1) et (2), on montre facilement que $\underline{i}$ et $\underline{v}$ satisfont les équations, dites de télégraphistes.

$$\frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} = -L_1 C_1 \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} - (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - R_1 G_1 \underline{v} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial x^2} = -L_1 C_1 \frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial t^2} - (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial \underline{i}}{\partial t} - R_1 G_1 \underline{i} = 0 \qquad (4)$$

Dans le cas où le régime est sinusoïdal, (1), (2), (3) et (4) deviennent :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial x} = -(R_1 + \mathrm{j} L_1 \omega) \underline{I} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -(G_1 + \mathrm{j} C_1 \omega) \underline{V} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x^2} = (R_1 + \mathrm{j} L_1 \omega)(G_1 + \mathrm{j} C_1 \omega) \underline{V} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial x^2} = (R_1 + \mathrm{j} L_1 \omega)(G_1 + \mathrm{j} C_1 \omega) \underline{I} \qquad (8)$$

Posons : $$\gamma = \sqrt{(R_1 + \mathrm{j} L_1 \omega)(G_1 + \mathrm{j} C_1 \omega)} \qquad (9)$$

C'est une quantité complexe que l'on appelle la constante de propagation et dont nous ferons l'étude plus loin. (7) et (8) s'écrivent donc :

$$\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x^2} = \gamma^2 \underline{V} \qquad (10a) \qquad \frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial x^2} = \gamma^2 \underline{I} \qquad (10b)$$

Ce sont les équations de propagation de la tension et du courant le long de la ligne.

(10a) et (10b) admettent des solutions de la forme :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i \mathrm{e}^{-\gamma x} + \underline{V}_r \mathrm{e}^{\gamma x} \qquad (11a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i \mathrm{e}^{-\gamma x} + \underline{I}_r \mathrm{e}^{\gamma x} \qquad (11b)$$

$\underline{V}_i$, $\underline{I}_i$, $\underline{V}_r$, $\underline{I}_r$ sont des constantes d'intégration. Il est évident d'après (5) ou (6) qu'elles sont liées deux à deux puisque l'on a en effet :

$$\frac{\underline{V}_i}{\underline{I}_i} = -\frac{\underline{V}_r}{\underline{I}_r} = \sqrt{\frac{R_1 + \mathrm{j} L_1 \omega}{G_1 + \mathrm{j} C_1 \omega}} \qquad (12)$$

quantité qui est homogène à une impédance.

NB
γ et Z_c sont aussi appelés les paramètres secondaires de la ligne.

Posons : $$Z_c = \sqrt{\frac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}} \quad (13)$$

quantité que l'on appelle l'impédance caractéristique de la ligne et dont nous verrons plus tard la signification et l'importance.

2.3 ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION

$\underline{V}$ et $\underline{I}$ ayant la même forme, il suffit de faire cette étude uniquement pour $\underline{V}$, par exemple.

2.3.1. Mise en évidence de la superposition de deux ondes

Nous voyons, d'après (9), que γ est de la forme $\alpha + j\beta$. Donc :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}(x) e^{j\omega t} = \underline{V}_i e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + \underline{V}_r e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \quad (14)$$

Cette expression est la somme de deux termes :

- L'un dont l'amplitude diminue lorsque x augmente, c'est-à-dire pour un déplacement du générateur vers le récepteur ; il caractérise une onde incidente (indices i).
- L'autre dont l'amplitude diminue lorsque x diminue, c'est-à-dire pour un déplacement du récepteur vers le générateur ; il caractérise une onde réfléchie (indice r). Par conséquent, la tension sur la ligne résulte de la superposition de deux ondes se propageant en sens contraire. Même chose pour le courant.

2.3.2. Caractéristiques de ces ondes

Étudions le terme $$\underline{v}_i(x, t) = \underline{V}_i e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (15)$$

Passons aux valeurs instantanées réelles : $v_i(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{v}_i(x, t)]$

$\underline{V}_i$ étant complexe, nous écrirons : $\underline{V}_i = V_i e^{j\phi}$

Donc : $$v_i(x, t) = V_i e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \phi - \beta x) \quad (16)$$

Il s'agit d'une onde dont l'amplitude diminue exponentiellement à mesure que l'on se rapproche du récepteur.

En un point donné de la ligne, la tension est une fonction sinusoïdale du temps dont la périodicité dans le temps est la période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{17}$$

À un instant donné, la tension est une fonction sinusoïdale de l'abscisse x dont la périodicité dans l'espace est la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{18}$$

Enfin, cette onde se déplace vers les x croissants avec la vitesse constante $v_p = \omega / \beta$, appelée « vitesse de phase ». Il suffit en effet pour trouver la vitesse de l'onde, d'écrire que : $\omega t + \varphi - \beta x = \text{cte}$.

Soit encore : $\omega \, dt - \beta \, dx = 0$.

D'où :
$$\frac{dx}{dt} = v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{19}$$

L'étude du terme $\underline{v}_r(x, t) = \underline{V}_r \, e^{\alpha x} \, e^{j(\omega t + \beta x)}$ mettrait de la même façon en évidence une onde :

- dont l'amplitude diminue exponentiellement à mesure que l'on se déplace vers le générateur,
- de périodicité dans l'espace $\lambda = 2\pi/\beta$ et dans le temps $T = 2\pi/\omega$,
- qui se déplace en sens inverse avec la même vitesse ω/β.

De telles ondes sont appelées des ondes progressives amorties. Leur superposition donne naissance à un phénomène d'ondes semi-stationnaires, qui est le régime général de fonctionnement d'une ligne. Nous l'étudierons en détail dans le prochain chapitre pour le cas d'une ligne sans perte et dans le chapitre VI pour le cas d'une ligne avec pertes.

2.3.3 Le paramètre de propagation γ

Le paramètre γ apparaît comme un paramètre de propagation dont :

- la partie réelle α est un paramètre d'affaiblissement exprimé en Nepers par mètre ou en décibels par mètre (1 dB = 0,1151 Np) ;
- la partie imaginaire β est un paramètre de phase exprimé en radians par mètre (1 radian = 57,30°).

Dans le cas particulier des lignes sans perte (LSP) : $R_l = G_l = 0$

$\rightarrow \alpha = 0$, $\beta = \omega \sqrt{L_l C_l}$ et $v_p = \dfrac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$.

Les ondes se propagent sans affaiblissement et l'on peut montrer que leur vitesse de propagation v_p est égale à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le diélectrique dont est constituée la ligne.

Nous allons maintenant étudier les expressions de la tension, du courant et de l'impédance en un point d'une ligne de transmission de longueur finie tout d'abord dans le cas général et ensuite dans quelques cas particuliers.

2.4 EXPRESSIONS DE LA TENSION, DU COURANT ET DE L'IMPÉDANCE

Le quantités connues sont $\underline{V}_0$, $\underline{I}_0$, γ et Z_c. Nous voulons calculer $\underline{V}(x)$ et $\underline{I}(x)$ en fonction de ces quantités dans le cas où la ligne est terminée sur une charge quelconque. D'après (11a) et (11b) :

$$\underline{V}_0 = \underline{V}_i + \underline{V}_r = Z_c\,(\underline{I}_i - \underline{I}_r)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_i + \underline{I}_r = \frac{\underline{V}_i - \underline{V}_r}{Z_c}$$

À partir de ces relations, nous obtenons :

$$\underline{V}_i = \frac{\underline{V}_0 + Z_c\,\underline{I}_0}{2} \tag{20}$$

$$\underline{V}_r = \frac{\underline{V}_0 - Z_c\,\underline{I}_0}{2} \tag{21}$$

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{I}_0}{2} + \frac{\underline{V}_0}{2\,Z_c} \tag{22}$$

$$\underline{I}_r = \frac{\underline{I}_0}{2} - \frac{\underline{V}_0}{2\,Z_c} \tag{23}$$

En portant ces valeurs dans (11a) et (11b), nous obtenons :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 \operatorname{ch} \gamma x - Z_c\,\underline{I}_0 \operatorname{sh} \gamma x \tag{24}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\underline{V}_0}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x \tag{25}$$

$$Z(x) = Z_c\,\frac{Z_0 - Z_c \operatorname{th} \gamma x}{Z_c - Z_0 \operatorname{th} \gamma x} \tag{26}$$

Dans le cas des lignes sans perte, les relations (24), (25) et (26) s'écrivent :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 \cos \beta x - j\,Z_c\,\underline{I}_0 \sin \beta x \tag{27}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 \cos \beta x - j \frac{\underline{V}_0}{Z_c} \sin \beta x \tag{28}$$

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_0 - j Z_c \operatorname{tg} \beta x}{Z_c - j Z_0 \operatorname{tg} \beta x} \tag{29}$$

Enfin, il peut être intéressant de connaître la valeur de l'impédance d'entrée Z_0 en fonction de l'impédance de charge Z_R. D'après (26) :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_R + Z_c \operatorname{th} \gamma \ell}{Z_c + Z_R \operatorname{th} \gamma \ell} \tag{30}$$

Dans le cas des lignes sans pertes :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_R + j Z_c \operatorname{tg} \beta \ell}{Z_c + j Z_R \operatorname{tg} \beta \ell} \tag{31}$$

2.5. CAS PARTICULIER : LIGNE TERMINÉE PAR $Z_R = Z_C$ – ONDES PROGRESSIVES

Si $Z_R = Z_c$, il vient d'après (30) : $Z_0 = Z_c$.

Il apparaît donc que l'impédance d'entrée de la ligne est Z_c. Tout se passe comme si le générateur était directement fermé sur Z_c. D'après (26) nous voyons que dans ces conditions :

$$Z(x) = Z_c \tag{32}$$

En tout point de la ligne, l'impédance est donc l'impédance caractéristique. Comme :

$$\underline{V}_i = \underline{I}_0 \frac{Z_0 + Z_c}{2} \qquad \underline{I}_i = \frac{\underline{I}_0}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_c}\right)$$

$$\underline{V}_r = \underline{I}_0 \frac{Z_0 - Z_c}{2} \qquad \underline{I}_r = \frac{\underline{I}_0}{2}\left(1 - \frac{Z_0}{Z_c}\right)$$

il en résulte que :

$$\underline{V}_i = \underline{V}_0 \;\; ; \;\; \underline{V}_r = 0 \;\; \text{et} \;\; \underline{I}_i = \underline{I}_0 \;\; \text{et} \;\; \underline{I}_r = 0 \tag{33}$$

d'où :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 e^{-\gamma x} \tag{34}$$

et :

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 e^{-\gamma x} \tag{35}$$

Lorsqu'une ligne est terminée sur son impédance caractéristique, il n'y a pas d'onde réfléchie. Le régime qui s'établit sur cette ligne est appelé régime d'ondes progressives.

■ Passons aux valeurs instantanées complexes :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0 \, e^{-\alpha x} \, e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{36}$$

$$\underline{i}(x, t) = \underline{I}_0 \, e^{-\alpha x} \, e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{37}$$

Nous retrouvons dans ces expressions les caractéristiques d'une onde progressive, déjà signalées au paragraphe 2.3.2 « Caractéristiques de ces ondes » :

- l'amplitude décroît exponentiellement lorsque x augmente ;
- la phase se déplace avec une vitesse « de phase » ω / β.

Notons en outre que $\underline{v}$ et $\underline{i}$ sont en phase dans le temps et dans l'espace : donc toute la puissance transportée par une onde progressive l'est sous forme de puissance active. Ce régime d'ondes progressives est le régime de fonctionnement d'une ligne le plus favorable pour le transport de l'énergie.

■ Avec un millivoltmètre H.F. qui mesure directement la valeur efficace de la tension appliquée, ce sont les valeurs efficaces de la tension H.F. sur la ligne que l'on obtient :

$$V_{ef} = \frac{V(x)}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \, e^{\alpha x} \tag{38}$$

On observe donc lorsqu'on déplace la sonde de mesure vers les $x > 0$:

- une tension d'amplitude constante si la ligne est sans perte,
- une tension d'amplitude décroissant exponentiellement si la ligne a des pertes (fig. 4).

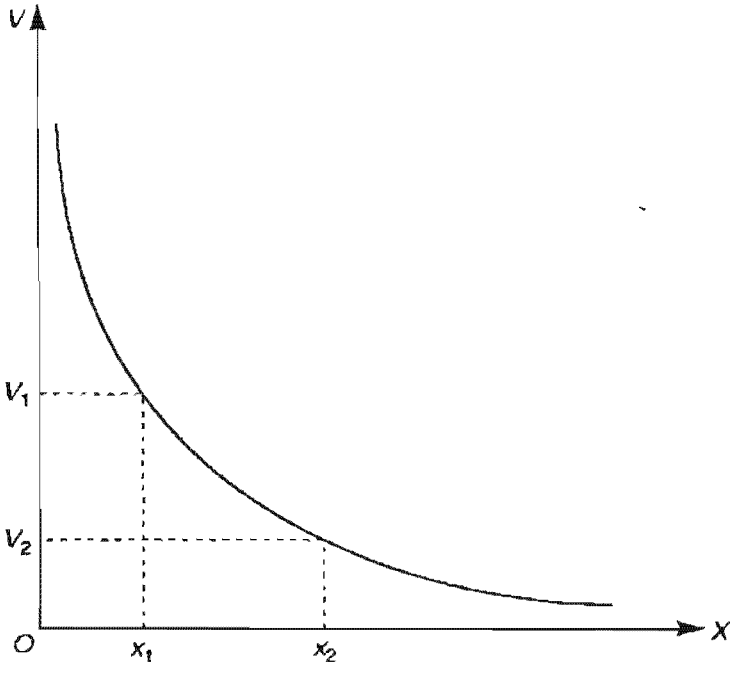


Figure 4. Décroissance exponentielle de la tension, le long d'une ligne à pertes.

Méthode de mesure de α

En x_1 : $V_1 = K \, e^{-\alpha x_1}$

En x_2 : $V_2 = K \, e^{-\alpha x_2}$

$$\frac{V_1}{V_2} = e^{\alpha (x_2 - x_1)}$$

$$\ln \frac{V_1}{V_2} = \alpha (x_2 - x_1)$$

$$\alpha_{Np/m} = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{V_1}{V_2} \tag{39}$$

2.6 CAS PARTICULIER : LIGNE EN COURT-CIRCUIT OU EN CIRCUIT OUVERT

L'étude du régime d'ondes stationnaires qui s'établit, dans ce cas, sur la ligne est effectuée de façon détaillée au chapitre suivant.

2.6.1 Ligne en court-circuit ($Z_R = 0$)

Cela signifie que pour $x = \ell$, $Z = 0$ et $\underline{V} = 0$. Écrivons donc que pour $x = \ell$, $\underline{V}(\ell) = 0$. D'après (24) :

$$0 = \underline{V}_0 \operatorname{ch} \gamma\ell - Z_c \underline{I}_0 \operatorname{sh} \gamma\ell \tag{40}$$

En calculant $\underline{V}_0$ ou $\underline{I}_0$ d'après cette relation et en portant la valeur ainsi obtenue dans les relations (24) ou (25), il vient :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 \frac{\operatorname{sh} \gamma(\ell - x)}{\operatorname{sh} \gamma\ell} \tag{41}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma(\ell - x)}{\operatorname{ch} \gamma\ell} \tag{42}$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{\operatorname{th} \gamma(\ell - x)}{\operatorname{th} \gamma\ell} \tag{43}$$

$$Z_0 = Z_c \operatorname{th} \gamma\ell \tag{44}$$

Pour les lignes sans pertes :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 \frac{\sin \beta(\ell - x)}{\sin \beta\ell} \tag{45}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 \frac{\cos \beta(\ell - x)}{\cos \beta\ell} \tag{46}$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{\operatorname{tg} \beta(\ell - x)}{\operatorname{tg} \beta\ell} \tag{47}$$

$$Z_0 = j Z_c \operatorname{tg} \beta\ell \tag{48}$$

2.6.2 Ligne en circuit ouvert ($Z_R = \infty$)

Cela signifie que pour $x = \ell$, $Z = \infty$ et $I = 0$. Écrivons donc que pour $x = \ell$, $\underline{I}(\ell) = 0$. D'après (25) :

$$0 = \underline{I}_0 \operatorname{ch} \gamma\ell - \frac{\underline{V}_0}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma\ell \tag{49}$$

D'où :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma(\ell - x)}{\operatorname{ch} \gamma\ell} \tag{50}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 \frac{\operatorname{sh} \gamma(\ell - x)}{\operatorname{sh} \gamma\ell} \tag{51}$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{\operatorname{th} \gamma\ell}{\operatorname{th} \gamma(\ell - x)} \tag{52}$$

$$Z_0 = \frac{Z_c}{\operatorname{th} \gamma\ell} \tag{53}$$

Pour les lignes sans pertes :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_0 \frac{\cos \beta(\ell - x)}{\cos \beta\ell} \tag{54}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_0 \frac{\sin \beta(\ell - x)}{\sin \beta\ell} \tag{55}$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{\operatorname{tg} \beta\ell}{\operatorname{tg} \beta(\ell - x)} \tag{56}$$

$$Z_0 = \frac{Z_c}{\mathrm{j} \operatorname{tg} \beta\ell} \tag{57}$$

2.7 CAS PARTICULIER : LIGNE QUART D'ONDE – LIGNE DEMI-ONDE

Nous avons vu que dans le cas où une ligne sans pertes est fermée sur une impédance terminale Z_R, l'impédance d'entrée est :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_R + \mathrm{j} Z_c \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_c + \mathrm{j} Z_R \operatorname{tg} \beta\ell} \tag{58}$$

• Si $\beta\ell = (2n + 1)\,\pi/2$ c'est-à-dire si $\ell = (2n + 1)\,\lambda/4$:

$$Z_0 = \frac{Z_c^2}{Z_R} \tag{59}$$

Donc la ligne $\lambda/4$ est un inverseur d'impédance :

- si Z_R est réactif, Z_0 le sera aussi mais de signe contraire ;
- si Z_R est une résistance, Z_0 sera aussi une résistance plus grande ou plus petite que Z_c selon que Z_R est plus petit ou plus grand que Z_c.

Cas limites
Si $Z_R = \infty$, $Z_0 = 0$ et si $Z_R = 0$, $Z_0 = \infty$

Une application de ce dernier résultat est que l'on se sert d'une ligne $\lambda/4$ court-circuitée comme isolateur H.F. puisque son impédance d'entrée est alors infinie.

• Si $\beta\ell = n\pi$ c'est–à–dire si $\ell = n\pi/2$:

$$Z_0 = Z_R \tag{60}$$

Une ligne demi-onde a une impédance d'entrée égale à son impédance de charge. Ceci est utilisé pour ramener en un endroit donné une impédance égale à une impédance de charge (antenne par exemple) sur laquelle on ne peut pas faire directement des mesures.

NB
Une ligne n'est $\lambda/4$ ou $\lambda/2$ que pour une fréquence. Ce sont donc des dispositifs à très faible largeur de bande.

2.8 LA VITESSE DE GROUPE

Nous avons vu au paragraphe 2.5 qu'une onde progressive de pulsation ω se propage avec une vitesse $v_p = \omega/\beta$, appelée vitesse de phase :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0\, e^{-\alpha x}\, e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{61}$$

En fait, les ondes qui se propagent sur les lignes de télécommunications ne sont jamais monochromatiques. Elles sont modulées par des signaux représentant les informations à transmettre et ces ondes modulées occupent une bande de fréquence utile d'étendue $2\Delta f$ autour d'une fréquence centrale f_0 : $2\Delta f = (f_0 + \Delta f) - (f_0 - \Delta f)$.

2.8.1 Cas de deux fréquences discrètes

Considérons, d'abord, deux ondes sinusoïdales de pulsations $\omega_0 + \Delta\omega$ et $\omega_0 - \Delta\omega$ pour lesquelles les valeurs du paramètre de phase sont $\beta_0 + \Delta\beta$ et $\beta_0 - \Delta\beta$:

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0\, e^{-\alpha x}\left[e^{j[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x]} + e^{j[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x]}\right]$$

$$\underline{v}(x, t) = 2V_0\, e^{-\alpha x} \cos(t\Delta\omega - x\Delta\beta)\, e^{j(\omega_0 t - \beta_0 x)} \tag{62}$$

Cette expression représente une onde sinusoïdale de pulsation ω_0 – onde porteuse $e^{j(\omega_0 t - \beta_0 x)}$ – dont l'amplitude, qui est modulée à la pulsation $\Delta\omega$, a pour

enveloppe la courbe $e^{-\alpha x} \cos(t\,\Delta\omega - x\,\Delta\beta)$. Nous pouvons donc définir :

- une vitesse de propagation de la porteuse, d'après :
 $\omega_0 t - \beta_0 x = \text{cte} \quad \Rightarrow v_p = \omega_0/\beta_0$ vitesse de phase,
- une vitesse de propagation de l'enveloppe, d'après :
 $t\,\Delta\omega - x\,\Delta\beta = \text{cte} \quad \Rightarrow v_g = \Delta\omega/\Delta\beta$ vitesse de groupe.

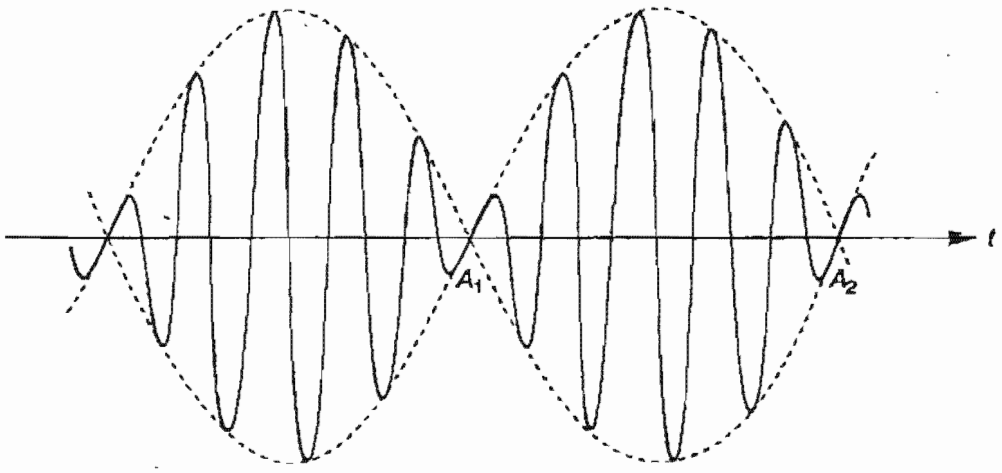


Figure 5. Représentation d'une onde porteuse (traits pleins) dont les amplitudes sont modulées (enveloppe en traits pointillés).

La représentation graphique (fig. 5) de l'expression (62) apparaît comme une succession de battements (ou groupes ou paquets d'ondes) qui se répètent périodiquement :

- si nous considérons l'un de ces groupes, compris entre les nœuds A_1 et A_2, nous constatons qu'il se déplace à la vitesse $\Delta\omega/\Delta\beta$;
- si, par contre, nous concentrons notre attention sur les ondes porteuses (en traits pleins) qui se trouvent à l'intérieur de chacun de ces groupes, nous constatons qu'elles se déplacent avec leur vitesse de phase propre ω/β.

Aux nœuds indiqués par A_1 et A_2, v et i (et, par conséquent, les champs E et H) sont nuls. Il semble donc impossible que l'énergie électromagnétique soit transférée dans l'une ou l'autre direction à travers ces points. L'énergie emmagasinée dans le paquet compris entre A_1 et A_2, doit se déplacer avec la même vitesse que l'enveloppe : $\Delta\omega/\Delta\beta$. *La vitesse de groupe apparaît donc comme la vitesse de propagation de l'énergie.*

2.8.2 Cas d'un spectre continu de fréquence

Prenons maintenant l'exemple, beaucoup plus réaliste en télécommunications, d'une onde modulée qui occupe une bande de fréquences $2\Delta f$ autour d'une fréquence centrale f_0.

$$\omega_0 - \Delta\omega \leqq \omega \leqq \omega_0 + \Delta\omega \quad \Leftrightarrow \quad \beta_0 - \Delta\beta \leqq \beta \leqq \beta_0 + \Delta\beta$$

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0 \, e^{-\alpha x} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A(\omega) \, e^{j(\omega t - \beta x)} \, d\omega \qquad (63)$$

Supposons que dans toute la bande de fréquences, $\beta(\omega)$ diffère peu de sa valeur pour $\omega = \omega_0$ et que nous puissions écrire, avec une bonne approximation :

$$\frac{\beta - \beta_0}{\omega - \omega_0} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\omega = \omega_0} = \beta'(\omega_0) = \beta'_0 \qquad (64)$$

Nous avons successivement :

$$\beta = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\,\beta'_0$$

$$\omega t - \beta x = \omega t - \beta_0 x - (\omega - \omega_0)\,\beta'_0 x = (\omega - \omega_0)t - (\omega - \omega_0)\,\beta'_0 x + (\omega_0 t - \beta_0 x)$$

Dans ces conditions, l'expression (63) s'écrit :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{V}_0 \, e^{-\alpha x} \, e^{j(\omega_0 t - \beta_0 x)} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A(\omega) \, e^{j(\omega - \omega_0)(t - \beta'_0 x)} \, d\omega \qquad (65)$$

- Le terme hors de l'intégrale représente une porteuse, de pulsation ω_0, se déplaçant à une vitesse ω_0/β_0, qui est la vitesse de phase.
- L'intégrale représente l'équation de l'enveloppe de la porteuse, qui se déplace à une vitesse définie par :

$$t - \beta'_0 x = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{1}{\beta'_0} = \left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_{\omega = \omega_0} \qquad (66)$$

v_g est la vitesse de groupe.

En fait, l'approximation qui conduit à la relation (64) est rarement vérifiée dans toute la bande de fréquences occupée par l'onde modulée. Il en résulte que la vitesse de groupe ne garde pas dans toute cette bande la valeur constante résultant de la relation ci-dessus.

Dans le cas général, la vitesse de groupe dépend donc de la fréquence :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \qquad (67)$$

La variation de $v_g(f)$ a des conséquences que nous allons étudier maintenant sur la qualité de la transmission.

2.8.3 Diagramme de Brillouin – Dispersion

Le diagramme qui, pour une ligne donnée, donne les variations de ω en fonction de β (fig. 6) est très commode. En effet, pour un point M de la courbe $\omega(\beta)$:

- la vitesse de phase est la pente de la droite OM ;
- la vitesse de groupe est la pente de la tangente en M.

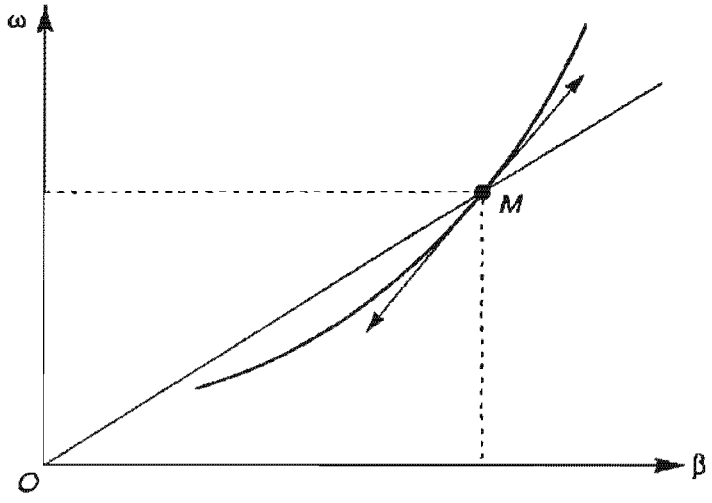


Figure 6. Diagramme ω(β) permettant de déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Lorsque cette courbe n'est pas droite, v_p et v_g sont différentes l'une de l'autre et leurs valeurs varient avec la fréquence. Comme la vitesse de groupe est la vitesse de propagation des diverses composantes constituant le spectre de fréquences de l'onde modulée, cela signifie que le temps de propagation de ces composantes sur une longueur de ligne ℓ donnée, ne sera pas la même. Il en résultera des distorsions du signal que représente ce spectre de fréquences. Ce phénomène, très gênant en télécommunications, est appelé la dispersion d'une ligne.

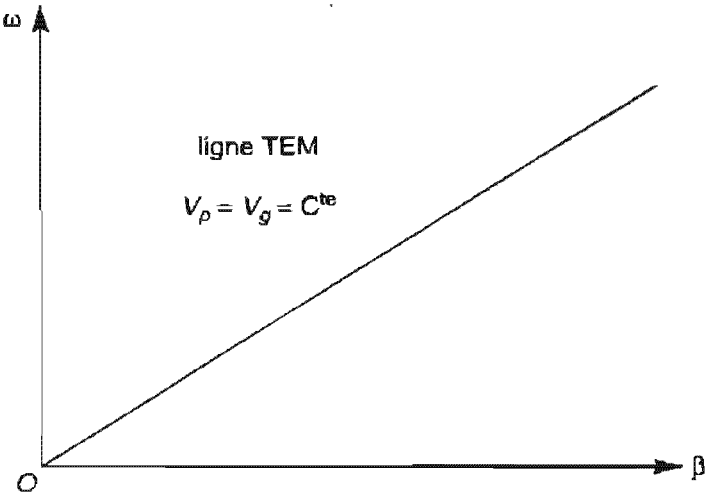


Figure 7. Diagramme ω(β) dans le cas particulier d'une ligne T.E.M.

Pour une ligne T.E.M. (fig. 7), nous démontrons que la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence lorsque les pertes sont nulles, faibles ou minimisées (chap. 2, § 2.3 « Étude des solutions de l'équation de propagation » et chap. 6, § 6.1 « Étude de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique ») :

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \tag{68}$$

De telles lignes sont donc exemptes de dispersion et $v_p = v_g \; \forall f$. Nous verrons qu'il n'en est pas de même pour les guides d'ondes.

2.8.4 Temps de propagation de groupe

Pour une ligne de longueur ℓ, le temps de propagation de groupe τ_g est lié à la vitesse de groupe v_g, par :

$$\tau_g = \frac{\ell}{v_g} \tag{69}$$

Lorsqu'il y a de la dispersion :

$$(v_g)_{min} \leqq v_g \leqq (v_g)_{max} \quad \Rightarrow \quad (\tau_g)_m = \frac{\ell}{(v_g)_M} \leqq \tau_g \leqq (\tau_g)_M = \frac{\ell}{(v_g)_m}$$

Pour que toutes les composantes du spectre de fréquences du signal transmis arrivent en phase, il faut donc des dispositifs correcteurs du temps de propagation de groupe : ce sont des filtres introduisant des retards $\Delta\tau$ variables, tels que :

$$\tau_g(f) + \Delta\tau(f) = \text{cte} \; \forall f \tag{70}$$

Lorsque c'est une impulsion qui se propage, soient $(v_g)_M$ et $(v_g)_m$ les vitesses extrêmes du spectre de fréquences que l'on transmet.

$$\Delta T = (\tau_g)_M - (\tau_g)_m = \ell \left[\frac{1}{(v_g)_m} - \frac{1}{(v_g)_M} \right] \tag{71}$$

ΔT est appelé l'élargissement d'impulsion pour une longueur ℓ. Dans les techniques de transmission numérique, ce temps doit rester inférieur à l'intervalle de temps séparant deux impulsions successives. C'est lui qui limite le débit numérique d'une liaison pour une transmission sur une longueur ℓ.

Exemple

Si $(\tau_g)_M - (\tau_g)_m = 10^{-8}$ s sur 1 km, le débit numérique théorique maximum sera de 100 Mbit/km, soit (100/n) Mbit pour n km.

EXERCICES

EXERCICE 2.1

(Paragraphe 2.2 – Équation de propagation)

Démontrer la relation (12) : $\underline{V}_i/\underline{I}_i = -\underline{V}_r/\underline{I}_r = Z_c$.

EXERCICE 2.2

(Paragraphe 2.2 – Équation de propagation)

Les paramètres primaires d'une ligne téléphonique d'abonné (fréquences vocales de l'ordre de 1 kHz) sont les suivants :

$R_1 = 7 \cdot 10^{-3}\ \Omega/\text{m}$ $\quad L_1 = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{H/m}$

$G_1 = 3{,}8 \cdot 10^{-9}\ \text{S/m}$ $\quad C_1 = 5{,}8 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}$

1) À la féquence de 1 kHz, calculer :

$R_1 + \text{j}\, L_1\, \omega$ sous la forme $\rho_1\, e^{\text{j}\varphi_1}$.

$G_1 + \text{j}\, C_1\, \omega$ sous la forme $\rho_2\, e^{\text{j}\varphi_2}$.

2) En déduire $Z_c = R + \text{j}X$ et $\gamma = \alpha + \text{j}\beta$.

EXERCICE 2.3

(Paragraphe 2.3 – Étude des solutions de l'équation de propagation)

Même ligne téléphonique qu'à l'exercice 2.2.

1) À 1 kHz, calculer la longueur d'onde et la vitesse de propagation.

2) Cette ligne est supposée sans perte. À 1 kHz, calculer la vitesse de propagation et β.

EXERCICE 2.4

(Paragraphe 2.4 – Expression de la tension, du courant et de l'impédance)

Un générateur de force électromotrice 100 volts, d'impédance interne $Z_G = 50\ \Omega$ alimente une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 100\ \Omega$ sur laquelle la longueur d'onde $\lambda = 1{,}5$ m. Cette ligne qui a une longueur $\ell = 10$ m, est fermée sur une impédance Z_R inconnue. L'impédance ramenée à l'entrée de la ligne (interface ligne-générateur) est $Z_0 = (125 - \text{j}\,120)\ \Omega$.

1) Calculer les amplitudes complexes de la tension $\underline{V}_0$ et du courant $\underline{I}_0$, à l'entrée de la ligne.

2) Calculer les amplitudes complexes de la tension $\underline{V}_R$ et du courant $\underline{I}_R$, à l'extrémité de la ligne.

3) En déduire Z_R et vérifier la valeur ainsi trouvée par un calcul direct à partir de Z_0.

EXERCICE 2.5

(Paragraphe 2.5 – Ondes progressives)

Les paramètres secondaires d'une ligne de longueur $\ell = 100$ m sont les suivants :

$Z_c = 800 - \text{j}\ 200\ \Omega$ et $\gamma = 0{,}00775 + \text{j}\ 2{,}55\ (\text{m}^{-1})$.

Cette ligne est fermée sur une impédance $Z_R = Z_c$ et elle est alimentée par un générateur dont les caractéristiques sont $f = 100$ MHz, $E = 100$ volts et $Z_G = 75\ \Omega$.

1) Calculer le courant $\underline{I}_0$ et la tension $\underline{V}_0$ à l'entrée de la ligne.

2) En déduire le courant $\underline{I}_R$ et la tension $\underline{V}_R$ sur la charge.

3) Quelle est la puissance moyenne active absorbée par l'impédance de charge Z_R ?

EXERCICE 2.6

(Paragraphes 2.2 et 2.6 – Équation de propagation et Cas particulier où $Z_R = 0$ et $Z_R = \infty$)

Une ligne téléphonique de longueur $\ell = 100$ km est alimentée par un générateur de fréquence $f = 1$ kHz. On mesure son impédance d'entrée Z_0 lorsque son autre extrémité est :

- en court-circuit : $(Z_0)_{cc} = 530\, e^{-j\,35°}$,
- en circuit ouvert : $(Z_0)_{c0} = 1\,070\, e^{j\,21°}$.

1) Calculer les paramètres secondaires de la ligne : Z_c et $\gamma = \alpha + j\beta$.

2) Déduire des résultats précédents les valeurs des paramètres primaires de la ligne : R_1, L_1, G_1, C_1.

EXERCICE 2.7

(Paragraphe 2.7 – Ligne quart d'onde, ligne demi-onde)

On veut adapter une antenne FM de type dipôle replié dont l'impédance est de 300 Ω à l'entrée d'un tuner dont l'impédance est de 75 Ω.

1) Déterminer l'impédance caractéristique d'une ligne d'adaptation $\lambda/4$.

2) On veut effectuer cette adaptation en deux fois en utilisant deux lignes $\lambda/4$ en série, sachant que l'impédance intermédiaire est de 150 Ω. Quelle sera l'impédance caractéristique de ces deux lignes ?

EXERCICE 2.8

(Paragraphe 2.8 – La vitesse de groupe)

La longueur d'onde λ_d sur une ligne dispersive est reliée à la longueur d'onde λ de propagation en espace libre par la relation :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_d}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2$$

λ_c est appelée longueur d'onde de coupure de la ligne considérée. Elle ne dépend que des dimensions de cette ligne. On notera :

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k, \quad \frac{2\pi}{\lambda_d} = \beta, \quad \frac{2\pi}{\lambda_c} = k_c.$$

1) Démontrer que le produit de la vitesse de phase v_p sur cette ligne par sa vitesse de groupe v_g est égal au carré de v, vitesse de propagation en espace libre.

2) Calculer la valeur de v_p en fonction de v, λ et λ_d. En déduire celle de v_g.

Chapitre 3

Étude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

3.1 ÉQUATIONS CORRESPONDANT AUX NOUVELLES HYPOTHÈSES

Au contraire des hypothèses qui avaient été prises au chapitre précédent, nous supposerons que les valeurs connues sont la tension et le courant en bout de ligne, côté charge.

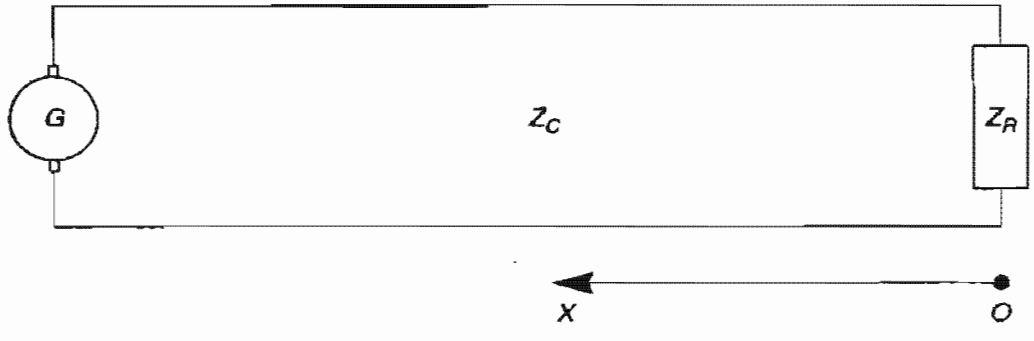


Figure 1.
Ligne de longueur ℓ (origine de l'axe des x à la charge), G, générateur, Z_R, impédance de charge.

Soit une ligne de longueur ℓ, d'impédance caractéristique Z_c, alimentée par un générateur de f.e.m. instantanée $e = E_0 \cos \omega t$ et de fréquence f, terminée sur une impédance Z_R (fig. 1). Nous avons vu que l'état électrique en un point quelconque d'une telle ligne résultait de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie sur le récepteur. Au chapitre 2, nous nous étions placés

pour l'étude du phénomène dans le cas où l'origine était prise au générateur et l'axe des abscisses orienté du générateur vers le récepteur. Puisque, dans ce chapitre, nous allons étudier le phénomène de réflexion à l'extrémité de la ligne, il vaut mieux prendre l'origine au récepteur et orienter l'axe des abscisses du récepteur vers le générateur.

Pour savoir comment sont modifiées les relations écrites au chapitre précédent, il suffit de remarquer que la variation de x, notée précédemment $+ dx$, est maintenant $- dx$. Dans ces conditions, les relations (5) et (6) deviennent :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial x} = (R_1 + j L_1 \omega)\, \underline{I} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = (G_1 + j C_1 \omega)\, \underline{V} \tag{1b}$$

Nous aurons toujours :

$$\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial x^2} = \gamma^2\, \underline{V} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial x^2} = \gamma^2\, \underline{I} \tag{2b}$$

dont les solutions générales devront être écrites ici :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i\, e^{\gamma x} + \underline{V}_r\, e^{-\gamma x} \tag{3a}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i\, e^{\gamma x} + \underline{I}_r\, e^{-\gamma x} \tag{3b}$$

À partir de (1a), (1b), (3a) et (3b), on démontre que l'on a toujours :

$$\frac{\underline{V}_i}{\underline{I}_i} = -\frac{\underline{V}_r}{\underline{I}_r} = Z_c$$

Soient $\underline{V}_R$ et $\underline{I}_R$ les tension et courant au récepteur. Nous avons ici :

$$\underline{V}_i = \frac{\underline{V}_R + Z_c \underline{I}_R}{2} \tag{4a}$$

$$\underline{V}_r = \frac{\underline{V}_R - Z_c \underline{I}_R}{2} \tag{4b}$$

Les expressions de la tension, du courant et de l'impédance en un point quelconque de la ligne s'écrivent donc maintenant :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_R \operatorname{ch} \gamma x + Z_c \underline{I}_R \operatorname{sh} \gamma x \tag{5}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_R \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\underline{V}_R}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x \tag{6}$$

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_R + Z_c \operatorname{th} \gamma x}{Z_c + Z_R \operatorname{th} \gamma x} \tag{7}$$

3.2 COEFFICIENT DE RÉFLEXION

Le coefficient de réflexion en un point d'abscisse x quelconque est défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à l'amplitude de l'onde incidente en ce point :

$$\underline{\Gamma}(x) = \frac{\underline{V}_r e^{-\gamma x}}{\underline{V}_i e^{\gamma x}} = \frac{\underline{V}_r}{\underline{V}_i} e^{-2\gamma x} \tag{8}$$

Comme :

$$\frac{\underline{V}_r}{\underline{V}_i} = \frac{\underline{V}_R - Z_c \underline{I}_R}{\underline{V}_R + Z_c \underline{I}_R} = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c}$$

il vient :

$$\underline{\Gamma}(x) = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} e^{-2\gamma x} \tag{9}$$

Pour $x = 0$, c'est-à-dire sur le récepteur, nous obtenons :

$$\underline{\Gamma}_R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \tag{10}$$

Il y a deux valeurs particulièrement intéressantes du module du coefficient de réflexion. Ce sont $\Gamma_R = 0$ et $\Gamma_R = 1$.

- La première valeur se produit lorsque $Z_R = Z_c$. Il n'y a alors pas d'onde réfléchie et nous avons :

 $$\underline{V}(x) = \underline{V}_i e^{\gamma x} \text{ et } \underline{I}(x) = \underline{I}_i e^{\gamma x}$$

 Dans ce cas, il s'établit sur la ligne un régime d'ondes progressives qui a été étudié au chapitre précédent.

- La deuxième valeur se produit dans les trois cas suivants :

 $$Z_R = 0 \ ; \ Z_R = \infty \ ; \ |Z_R - Z_c| = |Z_R + Z_c|$$

 Dans chacun de ces cas, il s'établit sur la ligne un régime d'ondes stationnaires pures. Nous n'en ferons l'étude détaillée que dans le cas de la ligne court-circuitée, en supposant qu'il s'agit d'une ligne sans pertes afin que les caractéristiques du régime d'ondes stationnaires ne soient pas masquées par des effets dus aux pertes.

3.3 CAS PARTICULIER OÙ $\Gamma_R = 1$ RÉGIME D'ONDES STATIONNAIRES

3.3.1 Ligne en court-circuit

Puisque $Z_R = 0$, $\underline{\Gamma}_R = -1$ et $\underline{V}_R = 0$. Donc :

$$\underline{V}(x) = Z_c \underline{I}_R \operatorname{sh} \gamma x \tag{11}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_R \operatorname{ch} \gamma x \quad (12)$$

$$Z(x) = Z_c \operatorname{th} \gamma x \quad (13)$$

Dans le cas des lignes sans pertes, nous obtenons :

$$\underline{V}(x) = \mathrm{j}\, Z_c\, \underline{I}_R \sin \beta x \quad (14)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_R \cos \beta x \quad (15)$$

$$Z(x) = \mathrm{j}\, Z_c \operatorname{tg} \beta x \quad (16)$$

a) Variations de la tension et du courant

Pour passer des amplitudes complexes aux grandeurs physiques réelles, il faut multiplier ces expressions par $e^{j\omega t}$ et prendre la partie réelle. On obtient ainsi :

$$v(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{V}(x)\, e^{j\omega t}] \qquad i(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{I}(x)\, e^{j\omega t}]$$

$\underline{I}_R$ étant complexe, nous écrirons : $\underline{I}_R = I_R\, e^{j\phi}$. Donc :

$$v(x, t) = \mathcal{R}\,[\mathrm{j}\, Z_c\, I_R \sin \beta x\, e^{j(\omega t + \phi)}]$$

$$i(x, t) = \mathcal{R}\,[I_R \cos \beta x\, e^{j(\omega t + \phi)}]$$

$$v(x, t) = -\, Z_c\, I_R \sin \beta x \sin (\omega t + \phi) \quad (17)$$

$$i(x, t) = I_R \cos \beta x \cos (\omega t + \phi) \quad (18)$$

N.B. *Ces calculs ne sont valables que si Z_c est réel, ce qui est très souvent le cas dans la pratique.*

Ou encore :

$$v(x, t) = Z_c\, I_R \sin \beta x \sin (\omega t + \phi + \pi)$$

$$i(x, t) = I_R \sin\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous voyons aisément, d'après ces deux dernières formules, que v *et* i *sont constamment en quadrature dans le temps et dans l'espace. La puissance transportée sera donc purement réactive. Autrement dit, il n'y a pas de transmission d'énergie active. Ce sont là les caractéristiques d'un régime d'ondes stationnaires.*

■ Recherchons la périodicité des variations de la tension et du courant dans le temps et dans l'espace, d'après les relations (17) et (18) :

- Si nous prenons x comme variable :
 i est nul pour : $\beta x = (2k + 1)\, \pi/2 \Rightarrow x = (2k + 1)\, \lambda/4$
 i est max ou min pour : $\beta x = k\, \pi \Rightarrow x = k\, \lambda/2$.
 La figure 2a représente ces variations. Nous y voyons que deux points où i est nul sont distants de $\lambda/2$, deux minima ou deux maxima sont distants de λ. Il apparaît donc pour i une périodicité dans l'espace de λ.
- Si nous prenons t comme variable :
 i est nul pour : $(\omega t + \phi) = (2k + 1)\, \pi/2 \Rightarrow t = (2k + 1)\, T/4 - \phi/\omega$
 i est max ou min pour : $(\omega t + \phi) = k\, \pi \Rightarrow t = k\, T/2 - \phi/\omega$
 Les variations de i en $f(t)$ sont représentées sur la figure 2c ; nous y voyons que deux instants où i est nul sont séparés par $T/2$ et que deux minima ou deux maxima sont séparés par T. Il en résulte que i a une périodicité dans le temps de T.

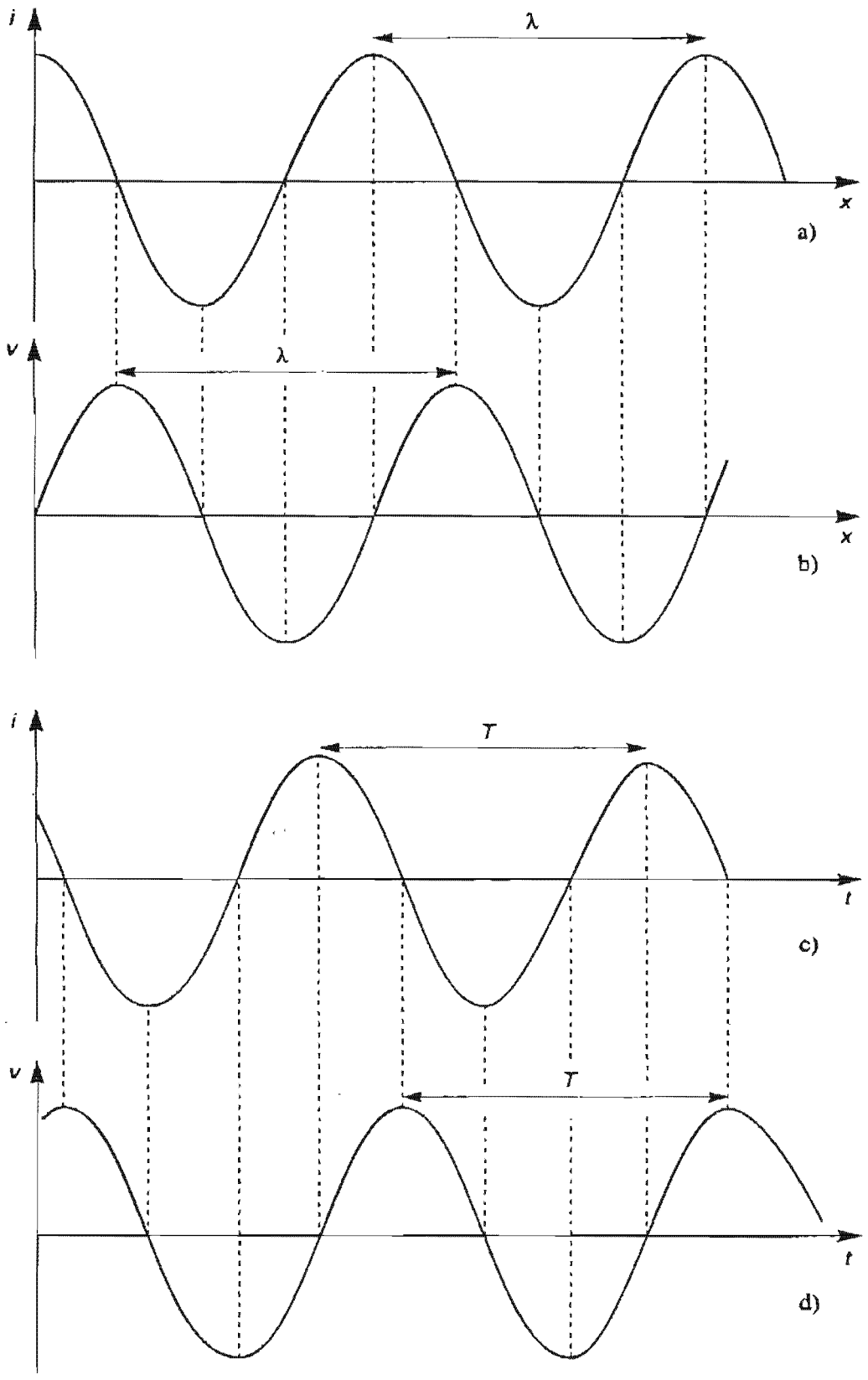


Figure 2.
Variations des valeurs instantanées de la tension et du courant sur une ligne en régime d'ondes stationnaires.

Remarque
Avec les appareils de mesure habituels – millivoltmètre HF ou indicateur d'ondes stationnaires (voir § 3.5 « Mesures de tensions sur une ligne ») – la périodicité que l'on observe est $\lambda/2$, puisque ces appareils mesurent des valeurs efficaces.

■ Pour la tension (fig. 2b et 2d) les phénomènes sont identiques, mais :

- À un instant donné, v est nul aux endroits où i est max ou min et réciproquement.
- À un endroit donné, v est nul aux instants où i est max ou min et réciproquement.

Il ne faut pas oublier que, lors des mesures, ce sont les valeurs efficaces de la tension et du courant qui sont accessibles, c'est-à-dire $V(x)\ \backslash\ 2$ et $I(x)\ \backslash\ 2$.

Or :

$$V(x) = Z_c\, I_R\, |\sin \beta x| \qquad (19a)$$

$$I(x) = I_R\, |\cos \beta x| \qquad (19b)$$

Les valeurs absolues de sin βx et de cos βx expliquent le fait que l'on observe une périodicité de $\lambda\ 2$ et non de λ.

b) Variations de l'impédance d'entrée d'une ligne en court-circuit

Puisque $Z(x) = j\, Z_c\, \text{tg}\, \beta x$, les variations de l'impédance d'entrée d'une ligne en court-circuit sont les mêmes que celles de tg βx. C'est pourquoi nous avons représenté ces variations en fonction de βx sur la figure 3.

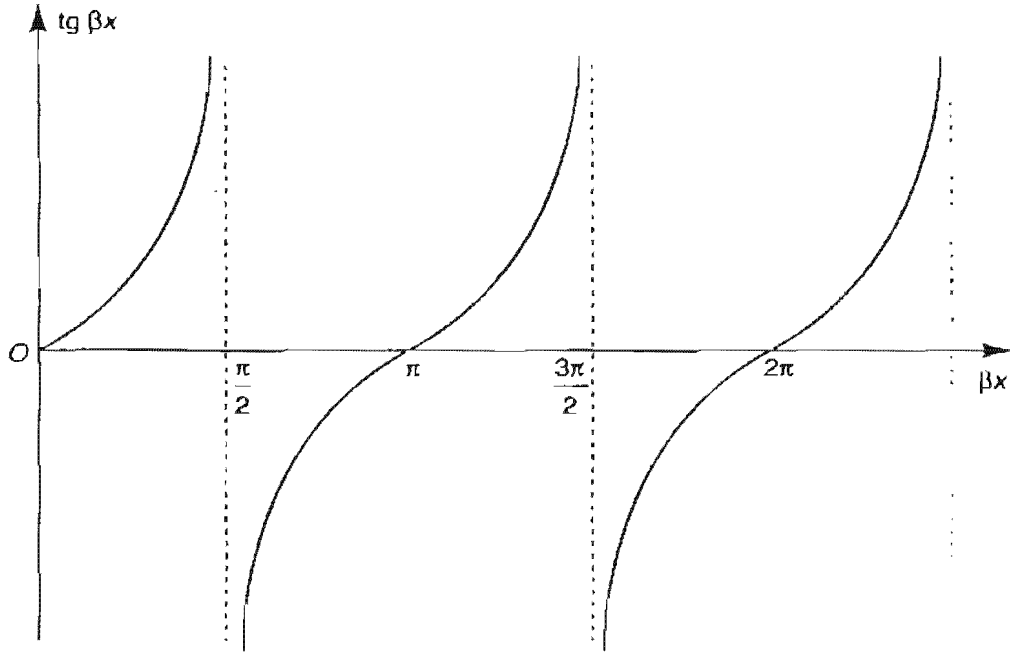


Figure 3. Variations de la tg βx : si tg $\beta x > 0$, Z_e est inductive ; si tg $\beta x < 0$, Z_e est capacitive.

- Pour $0 < \beta x < \pi/2$, Z_e est inductive. Une ligne court-circuitée de longueur comprise entre 0 et $\lambda/4$ est équivalente à une inductance.
- Pour $\beta x = \pi/2$, $Z_e = \infty$. Une ligne court-circuitée de longueur $\lambda\ 4$ est équivalente à un circuit résonnant parallèle à la résonance.

- Pour $\pi/2 < \beta x < \pi$, Z_e est capacitive. Une ligne court-circuitée de longueur comprise entre $\lambda/4$ et $\lambda/2$ est équivalente à une capacitance.
- Pour $\beta x = \pi$, $Z_e = 0$. Une ligne court-circuitée de longueur $\lambda/2$ est équivalente à un circuit résonnant série à la résonance.

Le stub constitue une application directe de ces propriétés. Le stub est un élément de ligne court-circuitée, de longueur variable. Il sert à réaliser une impédance d'entrée variable simplement en agissant sur sa longueur. Le stub $\lambda/4$ est utilisé comme isolateur (propriété déjà vue au 2.7).

3.3.2 Ligne en circuit ouvert

Puisque $Z_R = \infty$, $\Gamma_R = 1$ et $\underline{I}_R = 0$. Donc :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_R \operatorname{ch} \gamma x \tag{20}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{V}_R}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x \tag{21}$$

$$Z(x) = \frac{Z_c}{\operatorname{th} \gamma x} \tag{22}$$

Dans le cas des lignes sans pertes, nous avons :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_R \cos \beta x \tag{23}$$

$$I(x) = \mathrm{j}\left(\frac{\underline{V}_R}{Z_c}\right) \sin \beta x \tag{24}$$

$$Z(x) = -\mathrm{j}\,\frac{Z_c}{\operatorname{tg} \beta x} \tag{25}$$

Comme au paragraphe 3.3.1 « Ligne en court-circuit », passons aux valeurs physiques réelles :

$$v(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{V}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$
$$i(x, t) = \mathcal{R}\,[\underline{I}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

Soit :

$$v(x, t) = V_R \sin\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t + \phi) \tag{26}$$

$$i(x, t) = \frac{V_R}{Z_c} \sin \beta x \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{27}$$

$v(x, t)$ et $i(x, t)$ étant ici constamment en quadrature, nous observerons sur la ligne un régime d'ondes stationnaires. La seule différence avec le cas de la ligne en court-circuit c'est que les variations de la tension et du courant sont ici les mêmes, dans le temps et dans l'espace, que celles observées au paragraphe 3.3.1 « Ligne en court-circuit » respectivement pour le courant et la tension.

Quant aux variations de l'impédance d'entrée, elles sont les mêmes que celles de cotg βx et les valeurs de $Z(x)/Z_c$ sont exactement inverses de celles du cas précédent.

3.3.2 Ligne terminée sur une réactance

Dans ce cas : $Z_R = \mathrm{j}\, X_R$ et $\underline{\Gamma}_R = \dfrac{\mathrm{j}\, X_R - Z_c}{\mathrm{j}\, X_R + Z_c}$

Dans les cas où Z_c est réel : $\underline{\Gamma}_R = -\dfrac{Z_c - \mathrm{j}\, X_R}{Z_c + \mathrm{j}\, X_R}$

$\underline{\Gamma}_R$ est donc de la forme $\Gamma_R\, e^{j\phi}$. Nous avons :

$$\Gamma_R = 1 \quad \text{et} \quad \phi = \operatorname{Arg} \underline{\Gamma}_R = \pi - 2 \arctan \frac{X_R}{Z_c} \tag{28}$$

Nous pouvons écrire, d'après les expressions (3a) et (3b) :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i\, e^{\gamma x} [1 + e^{j\phi}\, e^{-2\gamma x}] \tag{29}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i\, e^{\gamma x} [1 - e^{j\phi}\, e^{-2\gamma x}] \tag{30}$$

Et, dans le cas des lignes sans pertes :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i\, e^{j\beta x} [1 + e^{j(\phi - 2\beta x)}] \tag{31}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i\, e^{j\beta x} [1 - e^{j(\phi - 2\beta x)}] \tag{32}$$

- Pour $\phi - 2\beta x = 2k\pi$, la tension est max et le courant est nul.
- Pour $\phi - 2\beta x = (2k + 1)\,\pi$, le courant est max et la tension est nulle.

La variation de la tension et du courant est donc la même que dans le cas d'une ligne en court-circuit ou en circuit ouvert, mais les maxima et les minima nuls sont tous décalés d'une longueur identique dépendant de la valeur de la charge.

3.4 CAS GÉNÉRAL DES LIGNES À COEFFICIENT DE RÉFLEXION QUELCONQUE

De la définition du coefficient de réflexion en un point quelconque d'une ligne donnée au paragraphe 3.1 « Équations correspondant aux nouvelles hypothèses », il résulte que les formules fondamentales (3a) et (3b) peuvent s'écrire :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i\, e^{\gamma x} [1 + \underline{\Gamma}_R\, e^{-2\gamma x}] \tag{33}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i\, e^{\gamma x} [1 - \underline{\Gamma}_R\, e^{-2\gamma x}] \tag{34}$$

d'où :
$$\underline{Z}(x) = Z_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}}{1 - \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}} \quad (35)$$

Dans le cas des lignes sans perte et en tenant compte du fait que $\underline{\Gamma}_R = \Gamma_R e^{j\phi}$:

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i e^{j\beta x} [1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}] \quad (36)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i e^{j\beta x} [1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}] \quad (37)$$

$$\underline{Z}(x) = Z_c \frac{1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}}{1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}} \quad (38)$$

Intéressons-nous aux valeurs efficaces (que l'on observe avec les appareils de mesures). Il suffit pour les avoir de prendre le module des amplitudes complexes et de diviser par $\sqrt{2}$.

$$V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} e^{j\beta x} \left| 1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)} \right| \quad (39)$$

$$I(x) = \frac{I_i}{\sqrt{2}} e^{j\beta x} \left| 1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)} \right| \quad (40)$$

$$Z(x) = Z_c \frac{\left| 1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)} \right|}{\left| 1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)} \right|} \quad (41)$$

Étudions les variations des expressions (36) à (38) et (39) à (41).

a) Pour $\phi - 2\beta x = 2k\pi$

- La tension est maximale

$$\underline{V}_M = \underline{V}_i (1 + \Gamma_R) \quad \text{ou} \quad V_M = \left(\frac{V_i}{\sqrt{2}} \right) (1 + \Gamma_R) \quad (42)$$

- Le courant est minimal :

$$\underline{I}_m = \underline{I}_i (1 - \Gamma_R) \quad \text{ou} \quad I_m = \left(\frac{I_i}{\sqrt{2}} \right) (1 - \Gamma_R) \quad (43)$$

- L'impédance est maximale :

$$Z_M = Z_c \frac{1 + \Gamma_R}{1 - \Gamma_R} \quad (44)$$

b) Pour $\phi - 2\beta x = (2k + 1)\pi$

- La tension est minimale :

$$\underline{V}_m = \underline{V}_i (1 - \Gamma_R) \quad \text{ou} \quad V_m = \left(\frac{V_i}{\sqrt{2}} \right) (1 - \Gamma_R) \quad (45)$$

• Le courant est maximal :

$$\underline{I}_M = \underline{I}_i (1 + \Gamma_R) \qquad \text{ou} \qquad I_M = \left(\frac{I_i}{\sqrt{2}}\right)(1 + \Gamma_R) \tag{46}$$

• L'impédance est minimale :

$$Z_m = Z_c \frac{1 - \Gamma_R}{1 + \Gamma_R} \tag{47}$$

Deux maxima ou deux minima étant séparés par $\lambda/2$, nous pouvons en conclure que les variations de toutes ces quantités se font avec une périodicité de $\lambda/2$. Pour mettre en évidence qu'il s'agit d'une variation sinusoïdale, il suffit de considérer l'expression de la tension, par exemple :

$$V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} \left| 1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)} \right|$$

Soit :

$$V(x) = \left(\frac{V_i}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{1 + 2\Gamma_R \cos(\phi - 2\beta x) + \Gamma_R^2} \tag{48}$$

c) Faisons une représentation graphique de ces phénomènes (fig. 4) :

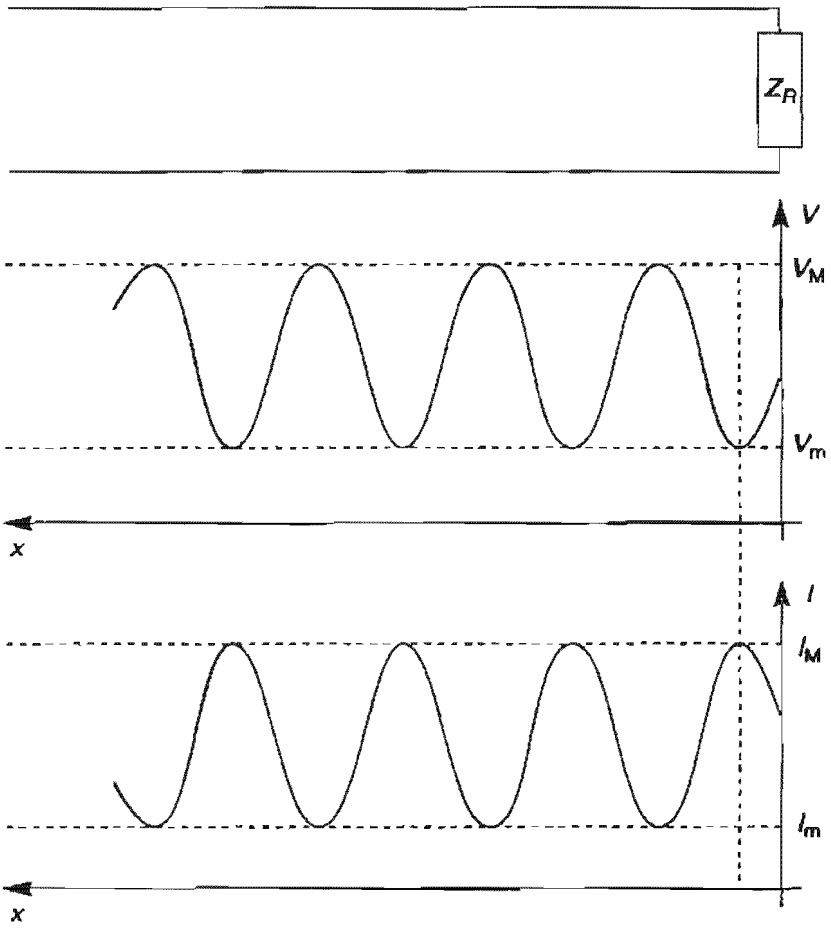


Figure 4.
Variations des valeurs efficaces de la tension, et du courant en régime d'ondes semi-stationnaires.

- La tension oscille entre V_M et V_m.
- Le courant oscille entre I_M et I_m.
- L'impédance oscille entre Z_M et Z_m.

Ces variations se font avec une périodicité de $\lambda/2$, la tension et le courant étant en quadrature. Si l'on considère, par exemple, les variations de la tension, nous pouvons décomposer ce régime en la superposition :

- d'un régime d'ondes progressives d'amplitude V_m ;
- à un régime d'ondes stationnaires d'amplitude variant de 0 à $V_M - V_m$.

On peut donc parler de régime semi-stationnaire avec comme cas particuliers :

- si $\Gamma_R = 1$ le régime d'ondes stationnaires (O.S.) pures ;
- si $\Gamma_R = 0$ le régime d'ondes progressives (O.P.) pures.

3.4.3 Rapport d'ondes stationnaires

La quantité $V_M/V_m = I_M/I_m = \rho$ est appelée le Rapport d'Ondes Stationnaires ou R.O.S. ; en anglais : *Voltage Standing Waves Ratio* ou *V.S.W.R.* Elle est liée au module du coefficient de réflexion de la charge par :

$$\rho = \frac{1 + \Gamma_R}{1 - \Gamma_R} \tag{49}$$

Comme $0 \leqq \Gamma_R \leqq 1$, la valeur de ρ est comprise entre 1 et l'infini.

Lorsque ρ est voisin de 1, on peut dire que le régime qui est établi sur la ligne étudiée est proche du régime d'ondes progressives. Dès que ρ vaut quelques unités, c'est qu'il y a une désadaptation ligne-charge assez sérieuse. Enfin, des valeurs de ρ supérieures à 10 caractérisent un régime qui se rapproche du régime d'ondes stationnaires.

Le R.O.S. est parfois appelé T.O.S. (Taux d'Ondes Stationnaires) ce qui n'est pas une appellation très judicieuse pour une quantité qui n'est pas comprise entre 0 et 1.

Notons enfin deux importantes relations :

$$Z_M = \frac{V_M}{I_m} = \rho Z_c \tag{50}$$

$$Z_m = \frac{V_m}{I_M} = \frac{Z_c}{\rho} \tag{51}$$

Comme, en général, Z_c est réelle, Z_M et Z_m sont réelles ; nous pouvons donc énoncer ce résultat très important :

Lorsqu'une ligne d'impédance caractéristique réelle est fermée sur une impédance quelconque, il y a deux points de cette ligne où l'impédance est réelle : ce sont les points où la tension est maximale et minimale. La valeur de l'impédance en ces points est égale au produit et au quotient de l'impédance caractéristique par le R.O.S.

3.5 MESURES DE TENSIONS SUR UNE LIGNE

3.5.1 La ligne de mesures

C'est l'élément indispensable pour que l'on puisse effectuer des mesures sur une ligne. Elle se compose (fig. 5) :

- d'un tronçon de ligne, identique à la ligne que l'on veut étudier, à la surface duquel une fente longitudinale a été usinée sur une longueur d'au moins une longueur d'onde ;
- d'un chariot que l'on peut déplacer avec grande précision le long de ce tronçon de ligne fendue ;
- d'une sonde très fine portée par le chariot et qui peut pénétrer par la fente à l'intérieur de la ligne à étudier.

La sonde jouant le rôle d'antenne pour le champ électrique sera donc sensible à la tension sur la ligne à l'endroit où elle se trouve. Cette tension pourra être mesurée à l'aide d'un millivoltmètre (VHF ou UHF selon la fréquence à laquelle fonctionne cette ligne) qui en donnera la valeur efficace. Mais les millivoltmètres sont très coûteux dans ces gammes de fréquences et n'existent pas en hyperfréquences. Aussi préfère-t-on associer à la sonde un appareillage de mesure plus simple, valable de la HF aux hyperfréquences, l'indicateur d'ondes stationnaires.

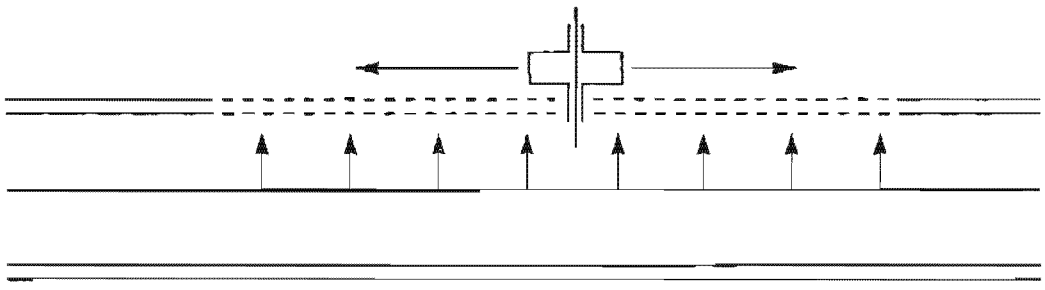


Figure 5.
Ligne de mesures à fente longitudinale.

3.5.2 Indicateur d'ondes stationnaires

Il est constitué, selon le schéma équivalent de la figure 6 :

- d'un cristal détecteur choisi pour la gamme de fréquences utilisées ;
- d'une capacité C qui peut parfois se réduire à la capacité parasite ;

• d'un milliampèremètre ou millivoltmètre continu.

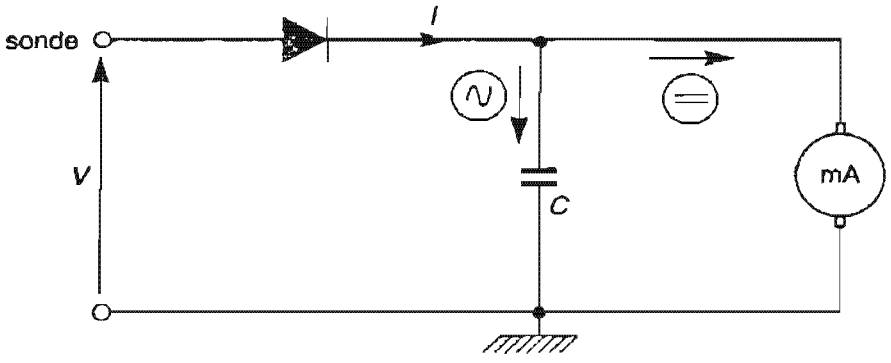


Figure 6.
Schéma équivalent d'un indicateur d'ondes stationnaires.

Soit $v = A \cos \omega t$ la tension appliquée au cristal détecteur par l'intermédiaire de la sonde (cette tension est directement proportionnelle à la tension sur la ligne à l'endroit où se trouve la sonde). Si v est dans les limites convenables – précisées par les constructeurs pour chaque type de cristal – le courant qu'il délivre est de la forme : $i = a_1 v + a_2 v^2 +$ termes d'ordre supérieur négligeables.

Soit : $$i = a_1 (A \cos \omega t) + a_2 (A \cos \omega t)^2$$

$$i = a_1 A \cos \omega t + \frac{a_2 A^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{a_2 A^2}{2}$$

Les composantes alternatives sont court-circuitées par la capacité. Seule parvient au milliampèremètre la composante continue qui est proportionnelle au carré de l'amplitude de la tension appliquée au cristal.

Le milliampèremètre donnera donc une indication proportionnelle au carré de l'amplitude de la tension HF sur la ligne ; on dit que la diode est à détection quadratique.

Soit $i_M (i_m)$ le courant lu sur le milliampèremètre lorsque la sonde se trouve en un maximum (minimum) de tension sur la ligne. Le R.O.S. devra être calculé d'après :

$$\rho = \frac{V_M}{V_m} = \sqrt{\frac{i_M}{i_m}} \qquad (52)$$

3.5.3 Mesure du R.O.S. à niveau constant

Une autre méthode de mesure du R.O.S. consiste à opérer avec un niveau constant, soit i_0, du courant détecté. En un maximum de tension V_M, réglons à A_M (dB) l'atténuation d'un atténuateur calibré de précision pour que le courant détecté soit i_0. En un minimum de tension V_m, l'atténuateur devra être réglé à A_m (dB) pour que le courant détecté soit toujours égal à i_0 ; nous avons : $20 \lg V_M/V_m = A_M - A_m$ (dB).

D'où : $$\rho = 10^{\frac{A_M - A_m}{20}} \quad (53)$$

L'intérêt de cette méthode est que la détermination du R.O.S. reste précise, même si le courant détecté par la diode n'est plus exactement proportionnel au carré de la tension sur la ligne, ce qui peut se produire avec une diode vieillissante ou endommagée.

3.6 MESURE DE L'IMPÉDANCE DE CHARGE D'UNE LIGNE

3.6.1 Principe de la mesure

Il résulte de la relation (10) que :

$$Z_R = Z_c \frac{1 + \Gamma_R}{1 - \Gamma_R} \quad (54)$$

Le calcul de l'impédance de charge d'une ligne d'impédance caractéristique Z_c connue nécessite donc la détermination du coefficient de réflexion de la charge : $\Gamma_R = \Gamma_R e^{j\Phi}$.

NB
Le fait que ϕ soit défini à $2k\pi$ près implique que la relation (56) peut être utilisée avec n'importe quel minimum de tension. Nous savons, en effet, que deux minima de tension sont séparés par $n\lambda/2$. Par conséquent $2\beta n\lambda/2 = 2n\pi$: quel que soit le minimum de tension choisi, la valeur de ϕ sera la même à $2k\pi$ près.

Cela peut se faire à partir de la configuration de la tension le long de la ligne. Nous avons vu, en effet, que :

$$\rho = \frac{1 + \Gamma_R}{1 - \Gamma_R}$$

Donc, après avoir mesuré le R.O.S., on pourra calculer :

$$\Gamma_R = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \quad (55)$$

D'autre part, la position d'un minimum de tension est définie, à partir de la charge par : $\phi - 2\beta x_m = (2k + 1)\,\pi$.

Donc, la mesure de x_m permettra de trouver à $2k\pi$ près :

$$\phi = 2\beta x_m + \pi \quad (56)$$

3.6.2 Technique de mesure

La mesure du R.O.S. découle directement de ce qui a été exposé au paragraphe 3.5.2 « Indicateur d'ondes stationnaires ». La mesure de x_m est aisée lorsqu'il est possible de connaître avec précision la distance entre la charge et l'un des minima de tension sur la ligne.

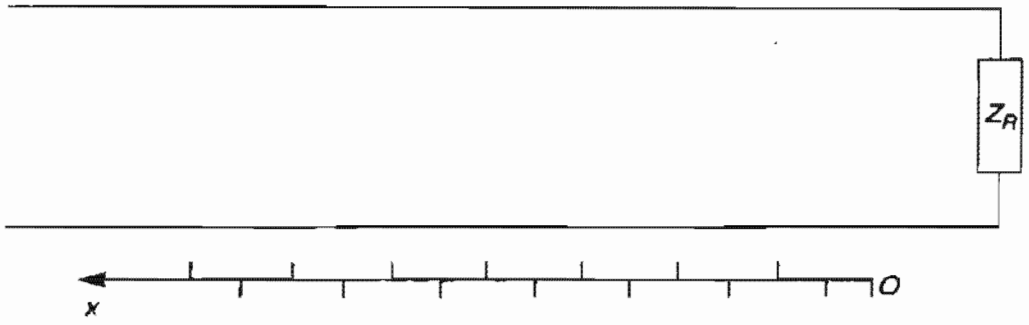


Figure 7.
Cas où l'origine de l'axe des abscisses ne coïncide pas avec l'impédance de charge.

Mais, dans certains cas, la graduation portée par la ligne de mesure ne donne pas la distance du point où se trouve la sonde à la charge : soit que cette graduation n'ait pas été positionnée de telle sorte que son zéro coïncide avec l'extrémité de la ligne de mesure où l'on place les charges à mesurer, soit que la charge n'ait pas été insérée en bout de ligne mais plus loin (fig. 7).

La méthode de mesure de x_m sera alors la suivante (fig. 8a et 8b) :

a) Placer la charge étudiée et pointer sur la ligne de mesure la position x_1 d'un minimum de tension.

b) Remplacer la charge par un court-circuit et pointer la position x_2 d'un minimum nul de tension. Nous savons dans ce cas que : $x_2 = n\,\lambda/2$.

c) x_m sera enfin déterminé par :

$$x_m = x_1 - x_2 + n\frac{\lambda}{2} \tag{57}$$

ce qui donnera toujours à $2k\pi$ près :

$$\phi = 2\beta(x_1 - x_2) + \pi \tag{58}$$

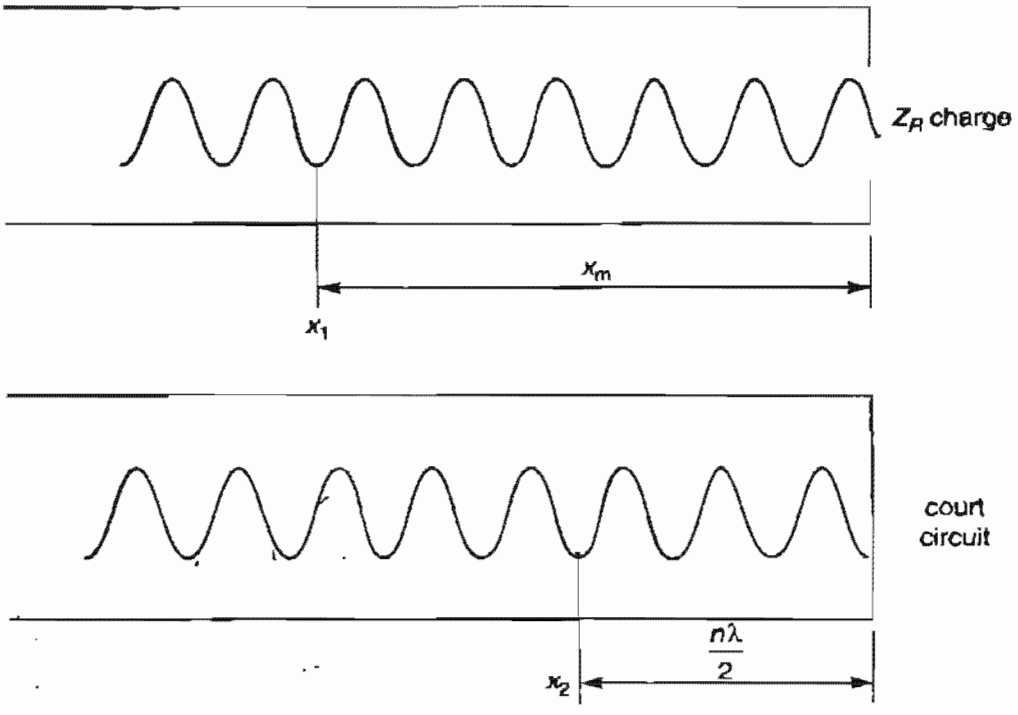


Figure 8.
Position d'un minimum de tension sur la ligne terminée : *a.* par la charge à mesurer, *b.* par un court-circuit.

EXERCICES

EXERCICE 3.1

(Paragraphe 3.1 – Équations correspondant aux nouvelles hypothèses)

Une ligne de longueur $\ell = 10$ m a les caractéristiques suivantes :

$$Z_c = 500\ \Omega\ ;\ \alpha = 0\ ;\ \beta = 2{,}856\ \text{rad/m}.$$

L'impédance de charge est :

$$Z_R = 2\,000 + \text{j}\ 1\,000\ \Omega.$$

Le courant dans cette charge est :

$$\underline{I}_R = 0{,}0341\ \text{e}^{-\text{j}\,45{,}166^\circ}\ \text{A}.$$

1) Calculer la tension $\underline{V}_e$ et le courant $\underline{I}_e$ à l'entrée de la ligne ($x = \ell$).

2) En déduire Z_e et, pour vérifier le résultat, calculer Z_e par la formule de transformation des impédances.

3) Puissance active transportée par la ligne.

EXERCICE 3.2

(Paragraphes 3.1 et 3.2 – Coefficient de réflexion)

Une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 75\ \Omega$ est terminée par une impédance de charge $Z_R = 125 + \text{j}\ 100\ \Omega$.

1) Calculer les valeurs de $\underline{\Gamma}_R$ en coordonnées polaires et en cartésiennes.

2) Sachant que $V_R = 143{,}2$ V, calculer $\underline{V}_i$ et $\underline{V}_r$.

3) Si la phase de $\underline{V}_i$ est prise pour référence, déterminer $\underline{V}_i$, $\underline{V}_r$, $\underline{I}_i$ et $\underline{I}_r$.

4) En déduire $\underline{V}_R$, $\underline{I}_R$ et la puissance active absorbée par la charge.

EXERCICE 3.3

(Paragraphe 3.2 – Coefficient de réflexion)

1) Exprimer le module et l'argument du coefficient de réflexion d'une impédance réactive pure : $Z_R = \text{j}\ X_R$ ($X_R > 0$ ou < 0) chargeant une ligne d'impédance caractéristique Z_c réelle.

2) Application au cas où $Z_c = 75\ \Omega$ et :

a) $Z_R = \text{j}\ 100\ \Omega$ (charge inductive),

b) $Z_R = -\text{j}\ 50\ \Omega$ (charge capacitive).

EXERCICE 3.4

(Paragraphes 3.2 et 3.4 – Cas général des lignes à coefficient de réflexion quelconque)

Une ligne coaxiale d'impédance caractéristique 50 Ω alimente une antenne dont l'impédance d'entrée est de 300 Ω. Les pertes sont de 0,3 dB/m et la longueur d'onde de 0,3125 m.

1) Calculer α (Np/m) et β (rad/m).

2) À une distance ℓ = 1 m de l'antenne, déterminer :

 a) le coefficient de réflexion,

 b) l'impédance.

EXERCICE 3.5

(Paragraphe 3.4 – Cas général des lignes à coefficient de réflexion quelconque)

Une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$ est fermée sur une impédance $Z_R = 115 + j\ 75\ \Omega$. À la fréquence utilisée, le paramètre de phase $\beta = 3{,}307$ rad/m.

1) Calculer $\underline{\Gamma}_R$ et le R.O.S.

2) Déterminer Z_M, Z_m et les positions x_M et x_m des premiers maxima et minima de tension à partir de la charge.

EXERCICE 3.6

(Paragraphe 3.4 – Cas général des lignes à coefficient de réflexion quelconque)

Soit une ligne sans perte transportant une puissance active de 100 W. $Z_c = 100\ \Omega$; R.O.S. : $\rho = 2$.

Calculer les valeurs efficaces, maximales et minimales, de la tension et du courant : V_M, V_m, I_M, I_m.

EXERCICE 3.7

(Paragraphe 3.6 – Mesure de l'impédance de charge d'une ligne)

Même énoncé que pour l'exercice 3.6. On sait, de plus, que le 1er minimum de tension est à 0,75 m de la charge et que $\lambda = 10$ m.

1) Calculer $\underline{\Gamma}_R$ et Z_R.

2) Calculer I_R et V_R en modules.

Chapitre 4

Diagramme de Smith

4.1 INTÉRÊT

Nous avons vu, au chapitre précédent, qu'il y avait une relation simple (formule 35) entre le coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}$ et l'impédance $Z(x)$ en un point d'une ligne :

$$Z(x) = Z_c \frac{1 + \underline{\Gamma}(x)}{1 - \underline{\Gamma}(x)} \tag{1}$$

Dans le cas particulier où l'on se place sur l'impédance de charge :

$$Z_R = Z_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_R}{1 - \underline{\Gamma}_R} \tag{2}$$

En raisonnant en impédances réduites z, qui sont le quotient de l'impédance Z par l'impédance caractéristique Z_c, nous avons :

$$z(x) = \frac{1 + \underline{\Gamma}(x)}{1 - \underline{\Gamma}(x)} \tag{3}$$

et

$$z_R = \frac{1 + \underline{\Gamma}_R}{1 - \underline{\Gamma}_R} \tag{4}$$

Il est donc possible de calculer z_R d'après le coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_R = \Gamma_R e^{j\varphi}$:

- la détermination de Γ_R résulte de la mesure du R.O.S. d'après :

$$\Gamma_R = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \tag{5}$$

• celle de φ résulte du pointage d'un minimum de tension d'après :

$$\varphi = 2\beta x_m + \pi \tag{6}$$

De même, il est possible de calculer $z(x)$ d'après le coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma}_R\, e^{-2\gamma x}$. Mais ces calculs sont longs. Le diagramme de Smith est un abaque d'impédances qui permet, connaissant $\underline{\Gamma}$, de déterminer z et inversement.

4.2 PRINCIPE ET CONSTRUCTION DU DIAGRAMME

La valeur du coefficient de réflexion est, dans le cas général :

$$\underline{\Gamma}(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} \tag{7}$$

Nous savons que : $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma}_R\, e^{-2\gamma x}$.

Dans le cas des lignes sans perte : $\underline{\Gamma}(x) = \Gamma_R\, e^{j(\varphi - 2\beta x)}$

En posant : $$\psi = \varphi - 2\beta x \tag{8}$$

la relation (7) peut s'écrire : $$\Gamma_R\, e^{j\psi} = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{9}$$

4.2.1 Représentation de $\Gamma_R\, e^{j\psi}$

Nous pouvons en faire deux représentations dans le plan complexe.

a) En coordonnées polaires (fig. 1a)

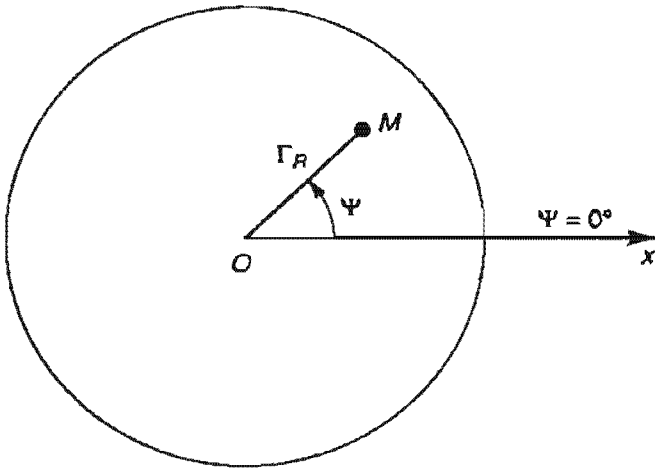


Figure 1a. Représentation de $\underline{\Gamma}(x)$ dans le plan complexe en coordonnées polaires : $\underline{\Gamma}(x) = \Gamma_R\, e^{j\psi}$.

Dans ce cas, les points représentatifs des différentes valeurs du coefficient de réflexion sont déterminés de façon unique à partir d'un point O de référence et d'un axe Ox de référence par :

- leur rayon vecteur qui est proportionnel à Γ_R,
- leur position angulaire qui représente ψ.

Comme dans tous les cas $\Gamma_R \leq 1$, un cercle de rayon unité comprendra toutes les valeurs possibles de l'impédance.

b) En coordonnées cartésiennes (fig. 1b)

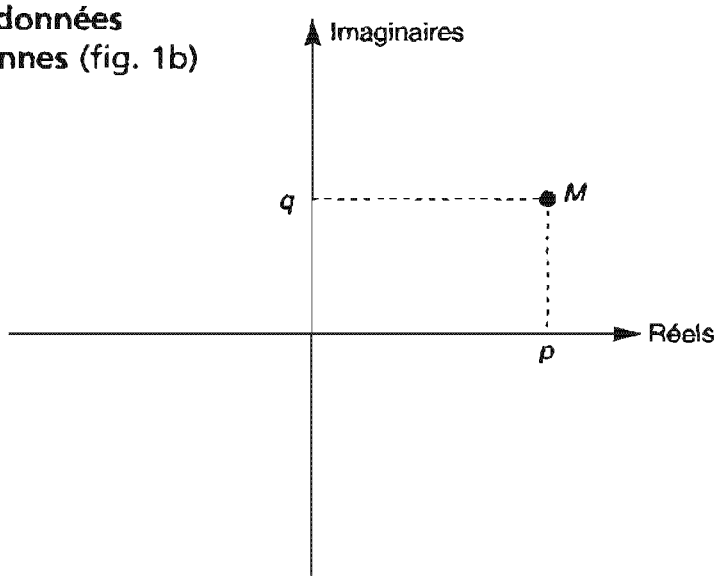


Figure 1b. Représentation de $\Gamma(x)$ dans le plan complexe en coordonnées cartésiennes : $\Gamma(x) = p + jq$.

Cela est rendu possible puisque :

$$\Gamma_R e^{j\psi} = p + jq \tag{10}$$

Dans ce cas, il suffit de rapporter le plan aux deux axes réel et imaginaire. Un point représentatif M est alors repéré de façon unique par :

- son abscisse complexe p qui est la projection de M sur l'axe des réels :

$$p = \Gamma_R \cos \psi \tag{11}$$

- son ordonnée complexe q qui est la projection de M sur l'axe des imaginaires :

$$q = \Gamma_R \sin \psi \tag{12}$$

c) Compatibilité des deux représentations de $\Gamma_R e^{j\psi}$

Dans la mesure où l'origine et l'unité de longueur choisies sont les mêmes que dans la représentation précédente et si, en outre, l'axe des réels coïncide avec l'axe Ox, les points représentatifs obtenus en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires sont confondus.

4.2.2 Représentation de $z = r + jx$

Le coefficient de réflexion est connu (déterminé par les mesures). Nous venons d'en indiquer quelles en sont les deux représentations ; il s'agit maintenant de trouver l'impédance correspondante. Autrement dit, connaissant p et q, déterminer r et x. Pour cela, nous allons utiliser la relation :

$$p + jq = \frac{(r-1) + jx}{(r+1) + jx} \tag{13}$$

déduite de (9) et (10) et qui lie le couple de valeurs (p, q) au couple (r, x). En égalant parties réelles et parties imaginaires, nous obtenons deux équations à deux inconnues r et x.

■ Éliminons x entre ces deux équations ; il vient :

$$\left(p - \frac{r}{1+r}\right)^2 + q^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \qquad (14)$$

Si p et q sont connus, il est possible de déterminer r par cette relation.

Mais on peut remarquer que, sous cette forme, cette relation définit des cercles de rayon $1/(1 + r)$, centrés au point du plan complexe $p = r/(1 + r)$, $q = 0$. Ce sont donc des cercles centrés sur l'axe p qui passent tous par un point fixe : $p = 1$, $q = 0$. Par conséquent, en prenant r comme paramètre, il sera possible de tracer, dans le plan complexe précédemment défini, un abaque dont chacun des cercles correspondra à une valeur de r (fig. 2).

Cas particuliers de ce faisceau de cercles à r = cte.

- $r = 0$ → Cercle de centre ($p = 0$, $q = 0$) de rayon $R = 1$. C'est le grand cercle du diagramme.
- $r = \infty$ → Cercle de centre ($p = 1$, $q = 0$) de rayon $R = 0$. C'est un cercle point.

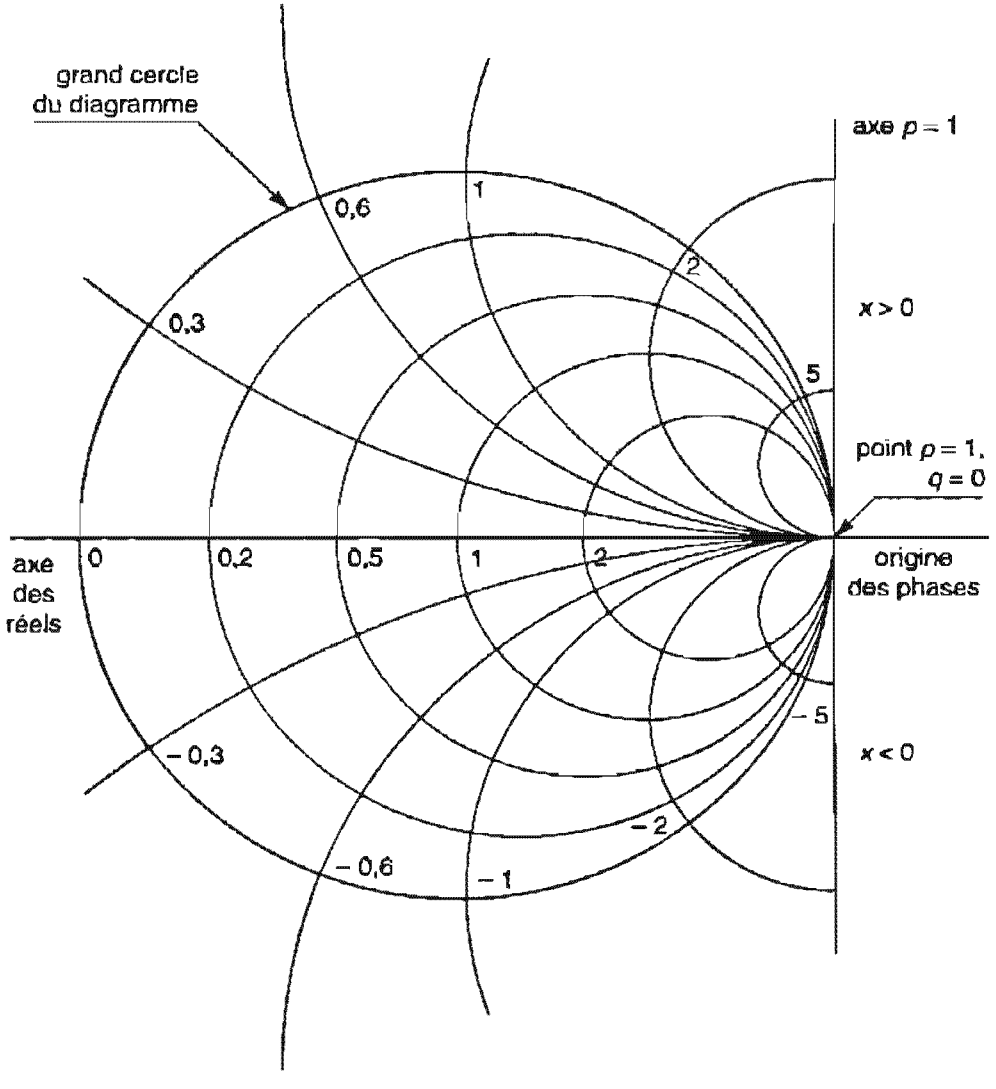


Figure 2. Construction des cercles du diagramme de Smith.

■ Éliminons r entre les deux équations ; il vient :

$$(p-1)^2+\left(q-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2 \qquad (15)$$

Si p et q sont connus, il est possible de déterminer x par cette relation.

Mais, on peut remarquer, comme précédemment, que cette relation définit des cercles de rayon $1/x$ centrés au point du plan complexe p = 1, q = $1/x$. Ce sont donc des cercles centrés sur un axe mené par p = 1, parallèlement à l'axe imaginaire. Ils forment un faisceau dont le point fixe est p = 1, q = 0. Par conséquent, en prenant x comme paramètre, il est possible de tracer un abaque où, à chaque valeur de x, correspond un cercle (fig. 2).

Cas particuliers de ce faisceau de cercles à x = cte.

- $x = 0$ → Cercle de centre (p = 1, q = ∞) de rayon $R = \infty$. C'est l'axe horizontal.
- $x = \infty$ → Cercle de centre ($p = 1$, $q = 0$) de rayon $R = 0$. C'est un cercle point.

Les deux faisceaux de cercles ainsi définis ont un point fixe commun (p = 1, q = 0) et ils sont orthogonaux. Leur ensemble forme le diagramme de Smith très utilisé dans la pratique.

NB *Dans ce cas, on peut avoir $x > 0$ ou $x < 0$, alors que dans le premier cas $r > 0$.*

4.3 PROPRIÉTÉS DU DIAGRAMME

4.3.1 Positionnement d'un point

- Si l'on connaît Γ_R et ψ, le point représentatif (fig. 3) est à l'intersection du cercle ayant pour centre le centre du diagramme et pour rayon Γ_R (se rappeler que pour le grand cercle du diagramme, $\Gamma_R = 1$) avec la droite faisant l'angle ψ avec l'axe horizontal des réels (résistances), ψ étant compté comme sur le cercle trigonométrique.
- Si l'on connaît r et x, il suffit de positionner ce point par interpolation avec les faisceaux à r = cte et x = cte tracés sur le diagramme.

Dans l'un et l'autre cas, on voit combien il est aisé de passer de $\Gamma_R\, e^{j\psi}$ à $r + jx$ ou réciproquement.

4.3.2 Lieu des points représentatifs des diverses impédances de la ligne (fig. 3)

D'après la formule (7), les variations sur la ligne de l'impédance réduite et du coefficient de réflexion sont liées. Comme, sur le diagramme de Smith, un point représente $z(x)$ et $\underline{\Gamma}(x)$, rechercher le lieu de $z(x)$ lorsque x varie revient au même que de rechercher le lieu de $\underline{\Gamma}(x)$.

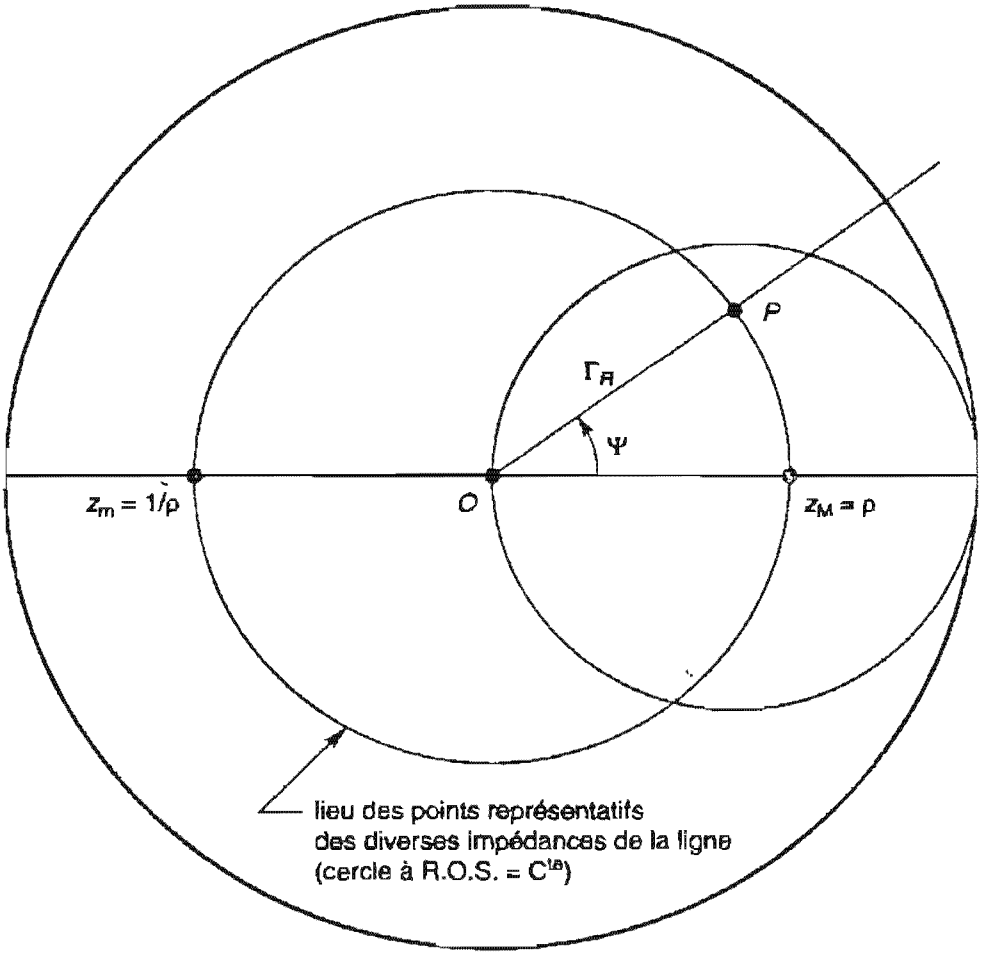


Figure 3. Positionnement d'un point sur le diagramme de Smith. Lieu des points représentatifs de $\underline{\Gamma}(x)$ et $z(x)$.

Comme
$$\underline{\Gamma}(x) = \Gamma_R \, e^{-2\alpha x} \, e^{j(\phi - 2\beta x)} \qquad (16)$$
nous voyons que lorsque x varie :

- sur une ligne avec pertes, ce lieu est une spirale logarithmique ;
- sur une ligne sans perte, le lieu de $\underline{\Gamma}(x)$ est un cercle de rayon Γ_R centré au centre de diagramme.

Donc :

- pour une ligne avec pertes, il faut connaître α pour pouvoir tracer la spirale logarithmique ;
- pour une ligne sans perte, il suffira de connaître le point représentatif d'une de ses impédances pour pouvoir tracer le cercle sur lequel se trouvent les points représentatifs de toutes les impédances de la ligne.

Remarque

Aux intersections d'un tel cercle avec l'axe des réels, on lit le R.O.S. et son inverse. On sait, en effet, qu'il y a deux points de la ligne où l'impédance est réelle : ce sont les points où l'impédance est maximale ou minimale ; en ces points :

$$Z_M = \rho \, Z_c \rightarrow z_M = \rho \qquad (17)$$

$$Z_m = \frac{Z_c}{\rho} \rightarrow z_m = \frac{1}{\rho} \qquad (18)$$

- le point correspondant au maxima est entre 1 et $\infty \rightarrow \rho$,
- le point correspondant au minima est entre 0 et $1 \rightarrow 1/\rho$.

4.3.3 Diagramme d'admittance

Nous avons placé $z = r + jx$ (r, résistance, x réactance) et nous voulons trouver $y = g + jb$ (g, conductance, b, susceptance). Il suffit pour cela de remarquer que :

$$z = \frac{1 + \Gamma_R e^{j\psi}}{1 - \Gamma_R e^{j\psi}} \tag{19}$$

$$y = \frac{1 - \Gamma_R e^{j\psi}}{1 + \Gamma_R e^{j\psi}} \tag{20}$$

On passe d'une formule à l'autre en ajoutant π à ψ.

Donc, le diagramme d'admittance se déduira du diagramme d'impédance par une symétrie par rapport au centre. Il suffira pour représenter une admittance de prendre le symétrique de $r + jx$.

NB
Les cercles à r = cte et à x = cte deviennent alors les cercles à g = cte et b = cte. Les signes pour b sont les mêmes que ceux pour x sur le diagramme.

4.3.4 Changement de base

Base Z_c :
$$z = \frac{Z_R}{Z_c} = r + jx \tag{21}$$

Base Z'_c :
$$z' = \frac{Z_R}{Z'_c} = z\frac{Z_c}{Z'_c} \tag{22}$$

4.3.5 Échelles marginales (fig. 4)

Une échelle donne les longueurs de ligne divisées par λ pour les déplacements :

- vers le générateur (en tournant dans le sens trigonométrique inverse) ;
- vers la charge (en tournant dans le sens trigonométrique direct).

Une autre échelle donne directement les angles de déphasage par rapport à l'origine de 0 à + 180°.

En dessous du diagramme de Smith, on trouve souvent, sous le titre *Radially Scalled Parameters*, des échelles qui ont une utilité pratique. Nous allons donner la signification des principales en renvoyant le lecteur, pour les autres, aux ouvrages spécialisés (voir référence bibliographique 28).

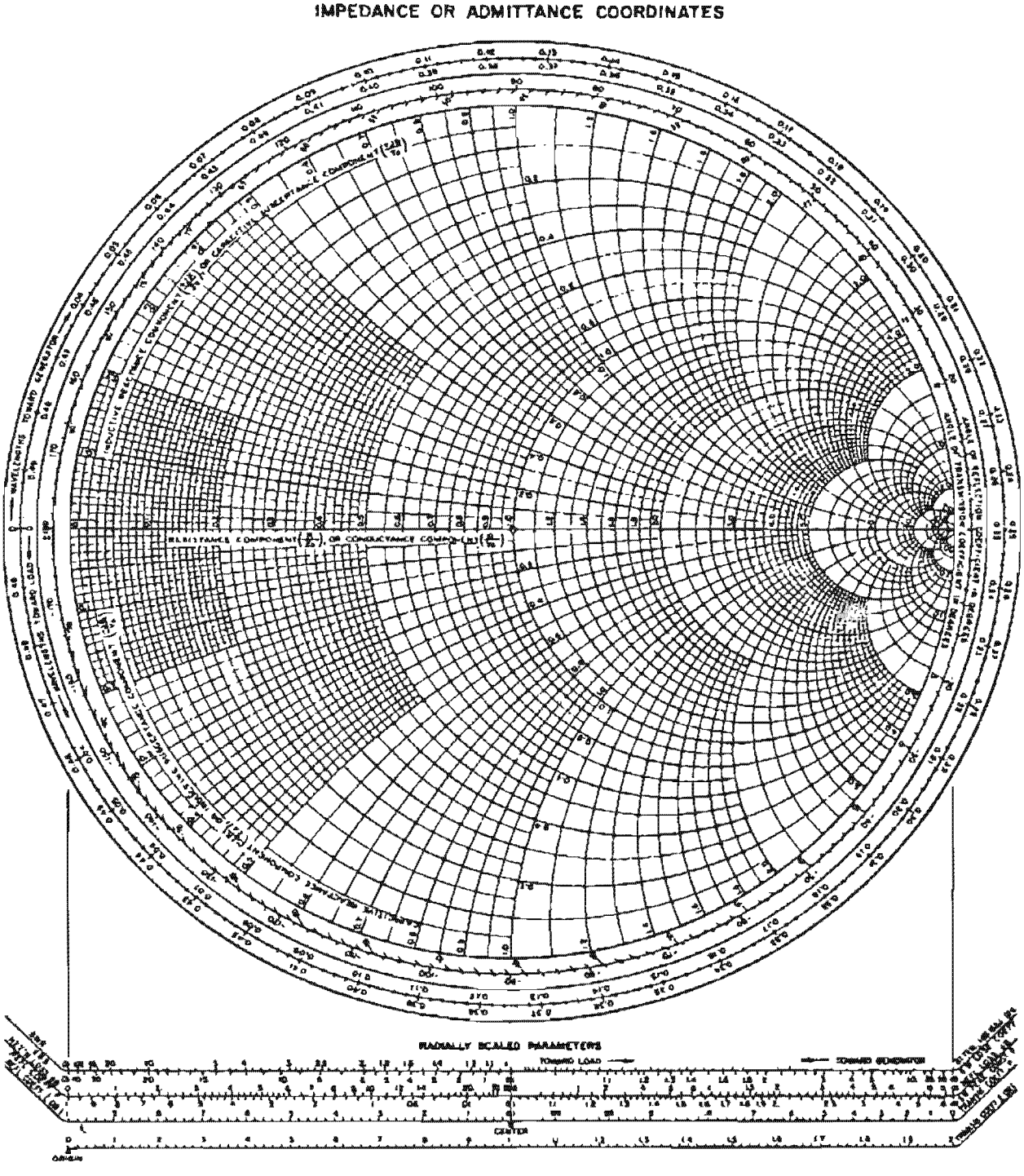


Figure 4.
Diagramme de Smith. Abaque extraite de « Electronic applications of the Smith chart » par P.H. Smith. Éditions Mac Graw Hill, New York, USA (1969).

1. Une échelle marquée S.W.R. et une autre marquée *Reflection coefficient* donnent respectivement les valeurs du R.O.S. et du coefficient de réflexion d'une charge correspondant à un rayon vecteur *OP*.
2. L'échelle *Return Loss in dB* donne le rapport, calculé en dB, entre la puissance arrivant sur un plan de désadaptation d'une ligne ou sur une charge et la puissance réfléchie sur ce plan ou sur cette charge. La valeur de ce rapport est exprimée en fonction du coefficient de réflexion Γ sur ce plan ou sur cette charge par : $-10 \log \Gamma^2$.
3. L'échelle *Reflected Loss in dB* donne le rapport, calculé en dB, entre la puissance arrivant sur un plan de désadaptation d'une ligne ou sur une charge, et la puissance transmise au-delà de ce plan ou de cette charge. La valeur de ce rapport est exprimée en fonction de Γ par $-10 \log (1 - \Gamma^2)$.

4.4 DÉTERMINATION DE L'IMPÉDANCE DE CHARGE D'UNE LIGNE

Nous avons expliqué au chapitre 3.6 comment on pouvait déterminer l'impédance de charge Z_R d'une ligne par le calcul en connaissant le R.O.S. et la position d'un minimum de tension sur la ligne. Nous allons voir que l'on peut trouver Z_R plus simplement et beaucoup plus rapidement à l'aide du diagramme de Smith (fig. 5).

D'abord, il faut tracer le cercle à R.O.S. = cte sur lequel se trouve l'impédance recherchée. Pour cela il suffit de repérer sur l'axe horizontal à droite, le point *M* correspondant au R.O.S. et par lequel passe ce cercle.

Ensuite, il suffit de constater que le point *N*, diamétralement opposé qui représente l'impédance minimale de la ligne, représente aussi un minimum de tension.

Soit, enfin x_m la distance mesurée entre ce minimum de tension et la charge. En tournant à partir de *N*, vers la charge, de x_m/λ nous obtenons le point *P* représentatif de l'impédance Z_R recherchée.

Une petite difficulté survient lorsque la distance x_m doit être mesurée indirectement d'après : $x_m = (x_1 - x_2) + n\lambda/2$.

Comme nous l'avons expliqué à la fin du chapitre précédent :

- si x_2 se trouve entre x_1 et le plan de la charge, la rotation de $|x_1 - x_2|/\lambda$ sur le diagramme doit bien être effectuée vers la charge ;
- mais si x_2 se trouve, au contraire, entre x_1 et le générateur, la rotation de $|x_1 - x_2|/\lambda$ doit alors être effectuée vers le générateur.

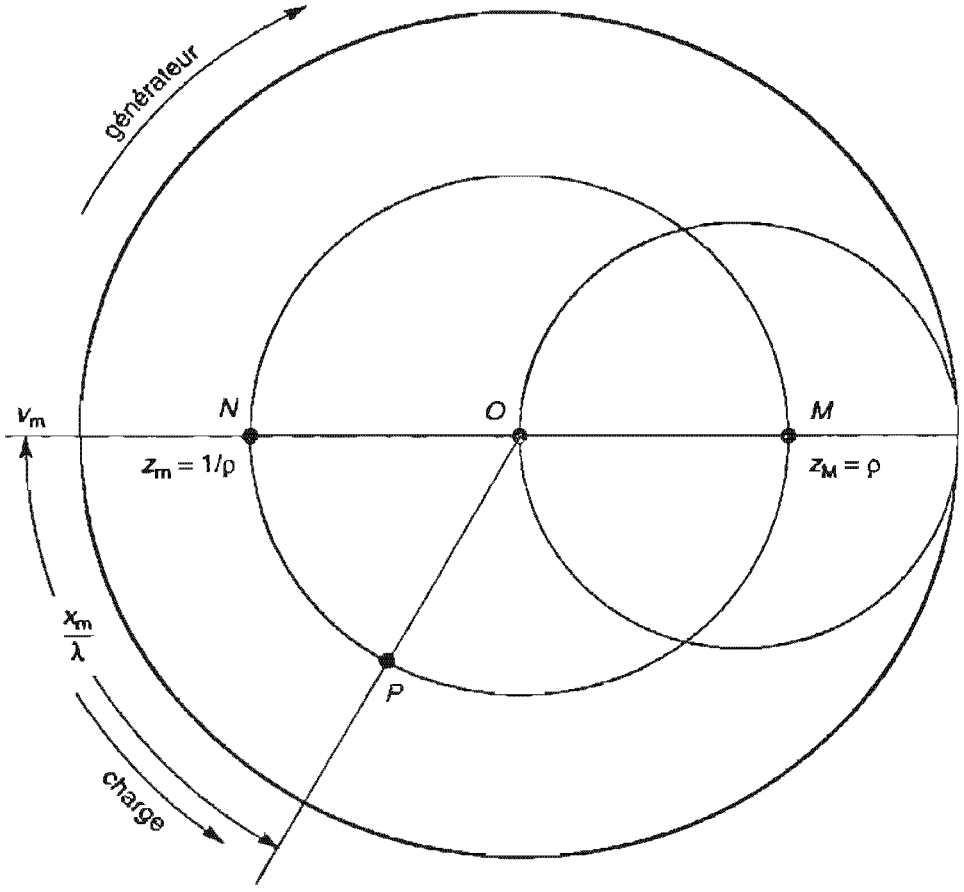


Figure 5. Détermination du point *P* représentatif de l'impédance de charge d'une ligne.

EXERCICES

EXERCICE 4.1

(Paragraphes 4.3.1 et 4.3.3 – Positionnement d'un point et Diagramme d'admittance)

1) Sur une ligne sans perte d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$, une impédance Z_R crée un coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_R = 0{,}54\ e^{j\,128°}$. En utilisant l'abaque de Smith, déterminer : le R.O.S. ρ, l'impédance Z_R et l'admittance Y_R.

2) Mêmes questions pour $\underline{\Gamma}_R = 0{,}4\ e^{-j\,62°}$.

EXERCICE 4.2

(Paragraphes 4.3.1 et 4.3.3)

1) Soit une ligne sans perte d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$, terminée par une impédance $Z_R = 40 + j\ 65\ \Omega$. En utilisant l'abaque de Smith, déterminer : l'admittance Y_R, le R.O.S. ρ, le coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_R$ de la charge.

2) Mêmes questions pour $Z_R = 30 - j\ 70\ \Omega$.

EXERCICE 4.3

(Paragraphe 4.3 – Propriétés du diagramme de Smith)

Une ligne sans perte d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$ est chargée par l'impédance $Z_R = 30 - j\ 55\ \Omega$. $\lambda = 8$ cm.

1) Rapport d'ondes stationnaires ρ et coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_R$.

2) Impédance ramenée à 11 cm de la charge

3) Position des maxima et minima de tension sur la ligne et valeur de l'impédance en ces points.

EXERCICE 4.4

(Paragraphe 4.3 – Propriétés du diagramme de Smith)

Une ligne sans perte de longueur $\ell = 2{,}25$ m et d'impédance caractéristique $Z_c = 75\ \Omega$ est terminée par une impédance $z_R = 2{,}10 + j\ 1{,}35$ en valeur réduite. $\lambda = 1{,}9$ m.

1) Déterminer son impédance d'entrée Z_e.

2) Rapport d'ondes stationnaires ρ et coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_R$.

3) Distance du 1er minimum d'impédance à la charge et valeur de Z_m.

EXERCICE 4.5

(Paragraphe 4.3 – Propriétés du diagramme de Smith)

1) Calculer la longueur d'une ligne court-circuitée dont l'admittance d'entrée est 2 j ($\lambda = 5$ cm).

2) Calculer la longueur d'une ligne en circuit ouvert dont l'impédance d'entrée est – 1,5 j ($\lambda = 10$ cm).

EXERCICE 4.6

(Paragraphe 4.3 – Propriétés du diagramme de Smith)

Deux tronçons de ligne sont mis en parallèle :

- l'un de $Z_{c_1} = 50\ \Omega$, chargé par une impédance $Z_1 = 50 - j\ 75\ \Omega$, de longueur $\ell_1 = 10$ cm ($\lambda_1 = 30$ cm) ;
- l'autre de $Z_{c_2} = 75\ \Omega$, chargé par une impédance $Z_2 = (100 + j\ 75)\ \Omega$, de longueur $\ell_2 = 6$ cm ($\lambda_2 = 20$ cm).

Calculer l'admittance Y_e ramenée entre les points où ces deux tronçons de ligne sont mis en parallèle, sachant que la ligne à laquelle ils se raccordent a une $Z_c = 50\ \Omega$.

EXERCICE 4.7

(Paragraphe 4.4 – Détermination de l'impédance de charge d'une ligne)

Soit une ligne sans perte de longueur $\ell = 145$ cm sur laquelle $\lambda = 100$ cm. Cette ligne est terminée par une impédance inconnue Z_R. On mesure un R.O.S. égal à 2,7 et la position du premier minimum de tension à partir de la charge est $x_m = 34{,}8$ cm.

Déterminer en valeurs réduites :

1) L'impédance de la charge.

2) L'impédance d'entrée de la ligne.

EXERCICE 4.8

(Paragraphe 4.4 – Détermination de l'impédance de charge d'une ligne)

Une ligne sans perte d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$ est chargée par une impédance inconnue Z_R. On mesure un R.O.S. égal à 5 et une longueur d'onde $\lambda = 50$ cm.

1) Lorsqu'on court-circuite la ligne, un minimum de tension se déplace de 5,25 cm vers la charge ; déterminer la valeur de Z_R.

2) De combien et dans quel sens se serait déplacé un minimum si Z_R avait été remplacée par un circuit ouvert ?

Chapitre 5

Les dispositifs d'adaptation

5.1 LE PROBLÈME DE L'ADAPTATION

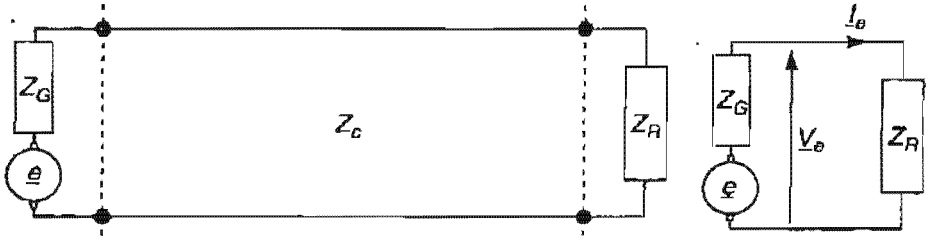


Figure 1. Générateur, ligne et récepteur.

Figure 2. Schéma équivalent.

Le problème le plus général est schématisé sur la figure 1.

Nous avons :

- Un générateur de force électromotrice $\underline{e} = \underline{E}\,\underline{F}(t)$, d'impédance interne complexe Z_G.
- Une ligne d'impédance caractéristique réelle Z_c.
- Un récepteur (ou charge) d'impédance complexe Z_R.

Il s'agit de transmettre, par l'intermédiaire de cette ligne, le maximum de puissance du générateur vers le récepteur.

Le problème se pose, et se résout, à deux niveaux : au niveau du générateur et au niveau du récepteur. Il faut, en effet, que :

- d'une part, le générateur puisse transmettre à la ligne le maximum de puissance (puissance disponible),
- d'autre part, le récepteur reçoive de la ligne le plus possible de cette puissance.

5.2 CONDITIONS D'ADAPTATION

5.2.1 Condition d'adaptation du générateur

Soit $Z_e = R_e + j\,X_e$ l'impédance d'entrée de la ligne. Cela veut dire que tout se passe comme si le générateur était fermé sur Z_e (fig. 2). Calculons quelle est la puissance active P fournie par le générateur, d'impédance interne $Z_G = R_G + j\,X_G$, à la ligne. Soient $\underline{V}_e$ et $\underline{I}_e$ les amplitudes des complexes de la tension et du courant à l'entrée de la ligne :

$$P = \frac{1}{2}\Re\left[\underline{V}_e\,\underline{I}_e^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[Z_e\,\underline{I}_e\,\underline{I}_e^*\right] = \frac{1}{2}R_e I_e^2 \tag{1}$$

Or :
$$\underline{I}_e = \frac{\underline{E}}{Z_G + Z_e} = \frac{\underline{E}}{(R_G + R_e) + j\,(X_G + X_e)} \tag{2}$$

Donc :
$$P = \frac{1}{2}R_e \frac{E^2}{(R_G + R_e)^2 + (X_G + X_e)^2} \tag{3}$$

Recherchons les conditions pour que la puissance délivrée soit maximale :

- Il faut tout d'abord que :

$$X_G + X_e = 0 \rightarrow X_e = -X_G \tag{4}$$

- Nous avons alors :

$$P = \frac{1}{2}R_e \frac{E^2}{(R_G + R_e)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{\left(\frac{R_G}{\sqrt{R_e}} + \sqrt{R_e}\right)^2} \tag{5}$$

Au dénominateur, nous avons la somme de deux nombres positifs dont le produit est constant. Pour que sa valeur soit minimale, il faut que :

$$\frac{R_G}{\sqrt{R_e}} = \sqrt{R_e} \rightarrow R_G = R_e \tag{6}$$

*⇒ Il faudra donc utiliser un dispositif d'adaptation qui transforme l'impédance d'entrée de la ligne en Z_G^**

Finalement :

$$Z_e = Z_G^* \tag{7}$$

5.2.2 Condition d'adaptation du récepteur

⇒ Il faudra donc placer entre la ligne et le récepteur un dispositif d'adaptation qui transforme l'impédance de charge Z_R de la ligne en Z_c

Le récepteur est adapté à la ligne lorsque $\Gamma_R = 0$, puisqu'alors il n'y a pas d'onde réfléchie ; nous somnes en régime d'ondes progressives et la puissance transmise par la ligne est uniquement de la puissance active. La condition $\Gamma_R = 0$ est réalisée lorsque :

$$Z_R = Z_c \tag{8}$$

5.2.3 Synthèse de ces conditions

Nous venons de démontrer que, pour adapter le générateur d'impédance interne Z_G, au récepteur d'impédance Z_R, lorsqu'ils sont reliés par une ligne d'impédance caractéristique Z_c, il était nécessaire d'utiliser deux dispositifs d'adaptation (fig. 3) :

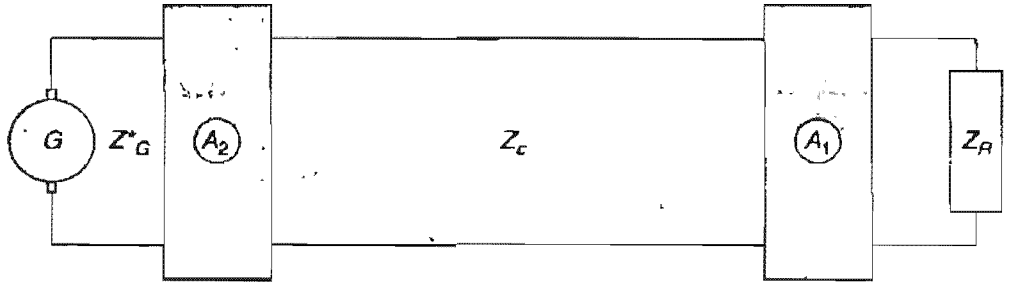


Figure 3. Principe de l'adaptation du récepteur à la ligne (dispositif A_1) et de la ligne au générateur (dispositif A_2).

- l'un A_1, à l'interface ligne-récepteur, qui doit transformer l'impédance Z_R de la charge en une impédance Z_c. Notons que, dans ces conditions, l'impédance d'entrée de la ligne est : $Z_e = Z_c$;
- l'autre A_2, à l'interface ligne-générateur, qui doit transformer l'impédance $Z_e = Z_c$ en Z^*_G.

Dans le cas particulier où l'impédance interne du générateur Z_G est réelle, il suffit d'avoir $Z_c = Z_G$ pour que l'adaptation soit réalisée du côté du générateur. Les générateurs commercialisés ont, en général, des impédances internes de 50 ou 75 Ω, voire 300 Ω.

En revanche, les dispositifs à l'état solide utilisés dans les circuits intégrés ou semi-intégrés pour micro-ondes présentent des impédances d'entrée complexes et il est donc nécessaire d'utiliser un dispositif d'adaptation pour réaliser la condition $Z_e = Z^*_G$.

Les dispositifs d'adaptation que nous allons étudier maintenant sont de divers types :

- adaptateurs par ligne quart d'onde ;
- adaptateurs à l'aide d'un ou deux « stubs » qui sont des tronçons de ligne court-circuités ;
- adaptateurs par réseau d'impédances et tronçon de ligne.

5.3 ADAPTATION PAR LIGNE QUART D'ONDE

Considérons un élément de ligne de longueur $\lambda/4$, d'impédance caractéristique Z'_c fermé sur une impédance Z_s (fig. 4). Nous avons vu qu'il ramène à son entrée une impédance :

$$Z_e = \frac{Z_c'^2}{Z_s} \qquad (9)$$

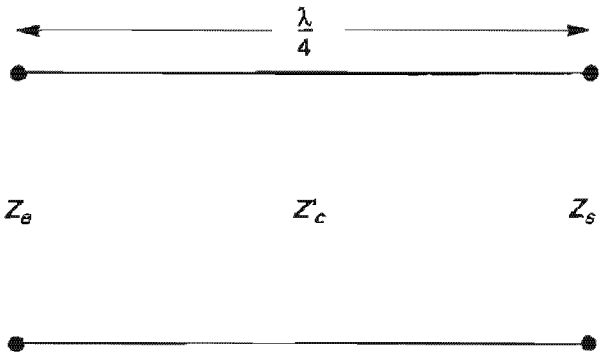


Figure 4.
Ligne quart d'onde.

Une telle ligne peut servir d'adaptateur puisqu'elle permet d'effectuer une transformation d'impédances. En particulier, dans le cas qui nous intéresse, nous avons : $Z_e = Z_c$ et $Z_s = Z_R$

d'où : $Z_c' = \sqrt{Z_c Z_R}$ (10)

5.3.1 Cas d'une impédance de charge Z_R réelle

Dans ce cas, l'adaptation sera réalisée en utilisant une ligne $\lambda/4$ d'impédance caractéristique réelle $Z_c' = \sqrt{Z_R Z_c}$. Seul le tronçon $\lambda/4$ travaille en régime d'ondes semi-stationnaires ; le reste de la ligne est parcouru par des ondes progressives.

5.3.2 Cas d'une impédance de charge Z_R complexe

Dans ce cas, si la ligne $\lambda/4$ est fermée sur Z_R, son impédance caractéristique devra être complexe. Pour avoir Z_c' réelle, il faudrait que la sortie de la ligne $\lambda/4$ se trouve en un endroit de la ligne où l'impédance est réelle, c'est-à-dire :

- Soit en un maximum de tension, situé à une distance x_M de la charge, où l'impédance est maximale $Z_M = \rho Z_c$.

 Dans ce cas :

$$Z_c' = Z_c \sqrt{\rho} \qquad (11)$$

- Soit en un minimum de tension, situé à une distance x_m de la charge, où l'impédance est minimale $Z_m = Z_c/\rho$.

 Dans ce cas :

$$Z_c' = \frac{Z_c}{\sqrt{\rho}} \qquad (12)$$

Afin d'avoir Z_c' réel, une autre possibilité est de placer la sortie de la ligne $\lambda/4$ directement sur la charge, et de compenser la partie imaginaire de l'impédance de charge en mettant en parallèle sur celle-ci un tronçon de ligne court-circuité dont l'impédance est imaginaire pure.

5.3.3 Adaptation à large bande passante

Les dispositifs d'adaptation que nous venons d'étudier ne sont valables qu'à la fréquence pour laquelle la longueur de la ligne est égale à $\lambda/4$: ce sont donc des dispositifs d'adaptation à bande étroite. Pour obtenir une adaptation à large bande, on peut fractionner l'adaptation en un certain nombre de tronçons $\lambda/4$ (fig. 5) tels que les impédances d'entrée successives de ces différents tronçons soient : $Z_c > Z_2 > Z_1 > Z_R$, et pour n tronçons : $Z_c > Z_n > \ldots > Z_1 > Z_R$.

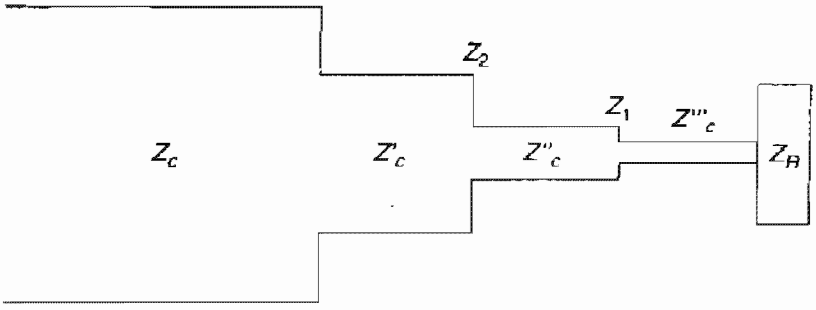


Figure 5. Adaptation à large bande.

À la limite, on pourrait montrer qu'il existe une possibilité d'adaptation utilisant des tronçons de ligne dont l'impédance caractéristique varierait de façon continue ; le profil idéal serait exponentiel et la largeur de bande importante. C'est le cas des lignes non-uniformes.

5.4 ADAPTATION À L'AIDE D'UN STUB

Un stub est un tronçon de ligne court-circuité de longueur s que l'on branche en dérivation sur la ligne principale à une distance d de la charge (fig. 6). Son impédance d'entrée étant :

$$Z(s) = j\,Z_c\,\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,s \qquad (13)$$

nous voyons qu'il est équivalent à une réactance dont on peut faire varier le signe et la grandeur en faisant varier sa longueur.

D'ailleurs, on pourrait aussi bien utiliser un élément localisé, capacitif ou inductif, placé en dérivation sur une ligne.

Les quantités connues sont : Z_R, Z_c et λ ; les inconnues sont : d et s. Nous allons raisonner :

- en admittances parce que nous avons des éléments disposés en parallèle,
- en valeurs réduites pour pouvoir les placer sur le diagramme de Smith.

Pour la charge :

$$z_R = \frac{Z_R}{Z_c} \qquad \text{et} \qquad y_R = \frac{Z_c}{Z_R} = g_R + j\,b_R \qquad (14)$$

Pour le stub :

$$z(s) = \frac{Z(s)}{Z_c} = j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} s = j \operatorname{tg} \beta s \tag{15}$$

$$y(s) = -j \operatorname{cotg} \beta s \tag{16}$$

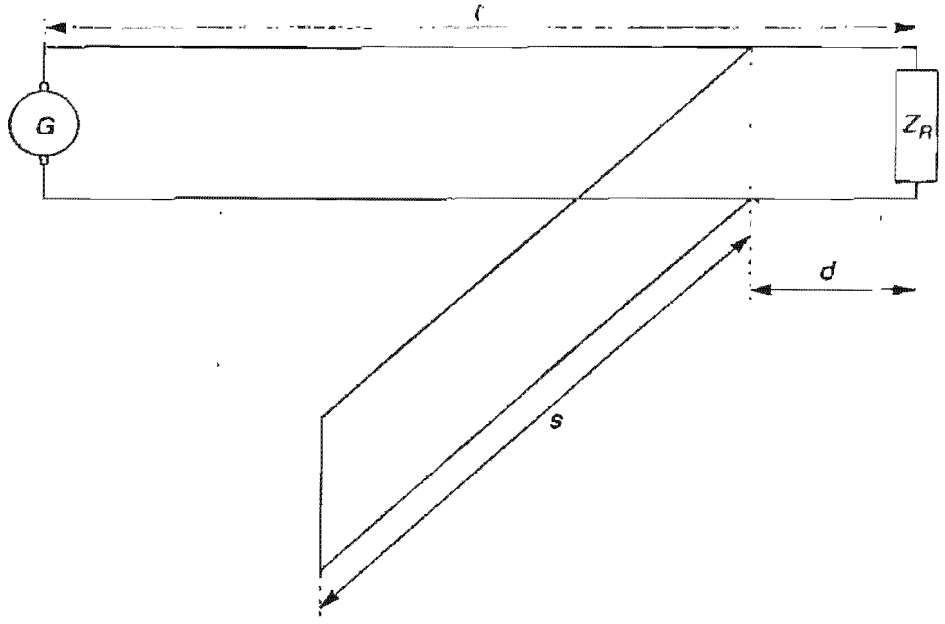


Figure 6.
Adaptation à un stub.

Nous allons calculer successivement les admittances aux divers endroits de la ligne :

- Dans le plan de charge : $y_R = g_R + j\, b_R$
- Dans un plan situé à la distance $d - \varepsilon$, c'est-à-dire juste avant le stub :

$$y(d-\varepsilon) = \frac{y_R + j \operatorname{tg} \beta (d-\varepsilon)}{1 + j\, y_R \operatorname{tg} \beta (d-\varepsilon)} \tag{17}$$

Puisque ε est pris aussi petit que l'on veut :

$$y(d-\varepsilon) = \frac{y_R + j \operatorname{tg} \beta d}{1 + j\, y_R \operatorname{tg} \beta d} = \frac{g_R + j\, b_R + j \operatorname{tg} \beta d}{1 - b_R \operatorname{tg} \beta d + j\, g_R \operatorname{tg} \beta d} \tag{18}$$

$$y(d-\varepsilon) = \frac{\left| g_R + j\,(b_R + \operatorname{tg} \beta d) \right| \left| (1 - b_R \operatorname{tg} \beta d) - j\, g_R \operatorname{tg} \beta d \right|}{(1 - b_R \operatorname{tg} \beta d)^2 + g_R^2 \operatorname{tg}^2 \beta d} \tag{19}$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$y(d-\varepsilon) = g(d-\varepsilon) + j\, b(d-\varepsilon) \tag{20}$$

- Dans un plan situé à la distance $d + \varepsilon$, c'est-à-dire juste après le stub :

$$y(d+\varepsilon) = y(d-\varepsilon) + y(s) = g(d-\varepsilon) + j\,[b(d-\varepsilon) - \operatorname{cotg} \beta s] \tag{21}$$

Pour que l'adaptation soit réalisée à partir de la distance $(d + \varepsilon)$, il faut que :

$$y(d+\varepsilon) = 1 + j\, O \tag{22}$$

On déduit de cette condition les deux équations qui vont fournir les deux inconnues d et s :

$$\text{①} \qquad g(d-\varepsilon)=1 \rightarrow \frac{g_R(1+\operatorname{tg}^2\beta d)}{(1-b_R\operatorname{tg}\beta d)^2+g_R^2\operatorname{tg}^2\beta d}=1 \qquad (23)$$

C'est une équation du second degré en tg βd qui fournit deux solutions : d et d' à $\lambda/2$ prés.

$$\text{②} \qquad b(d-\varepsilon)=\operatorname{cotg}\beta s \rightarrow \frac{b_R+(1-g_R^2-b_R^2)\operatorname{tg}\beta d-b_R\operatorname{tg}^2\beta d}{(1-b_R\operatorname{tg}\beta d)^2+g_R^2\operatorname{tg}^2\beta d}=\operatorname{cotg}\beta s \qquad (24)$$

D'après cette relation, nous voyons qu'aux deux valeurs d et d' correspondent les deux valeurs s et s'.

Il y a donc deux couples de solutions : (d, s) et (d', s'). On choisit celui qui correspond à la plus faible valeur de d afin que le tronçon de ligne qui ne fonctionne pas en ondes progressives soit le plus réduit possible.

5.5 ADAPTATION À L'AIDE DE DEUX STUBS

Comme précédemment, nous raisonnerons en admittances et en valeurs réduites.

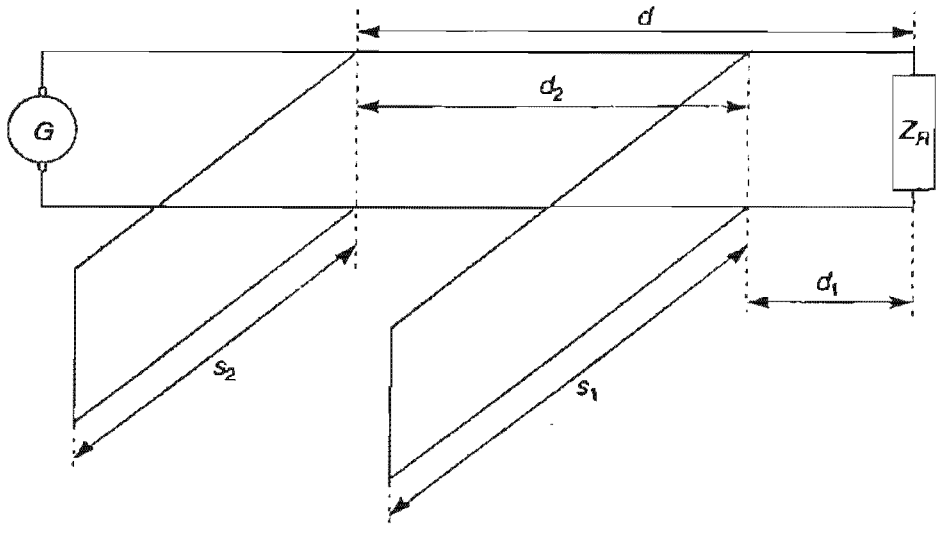


Figure 7.
Adaptation à l'aide de deux stubs.

Données : Z_R, Z_c, β, d_1 et d_2.

Inconnues : s_1 et s_2.

Nous allons calculer successivement les diverses admittances de la ligne.

- à la distance 0 : $\qquad y_R = g_R + j\, b_R \qquad (25)$

• à la distance $(d_1 - \varepsilon)$: $y(d_1 - \varepsilon) = \dfrac{y_R + j \operatorname{tg} \beta (d_1 - \varepsilon)}{1 + j\, y_R \operatorname{tg} \beta (d_1 - \varepsilon)}$ (26)

Nous pouvons écrire, puisque ε est pris aussi petit que l'on veut :

$$y(d_1 - \varepsilon) = \frac{y_R + j \operatorname{tg} \beta d_1}{1 + j\, y_R \operatorname{tg} \beta d_1} \tag{27}$$

Pour la suite, nous poserons :

$$y(d_1 - \varepsilon) = g(d_1 - \varepsilon) + j\, b(d_1 - \varepsilon) \tag{28}$$

• à la distance $(d_1 + \varepsilon)$: $y(d_1 + \varepsilon) = y(d_1 - \varepsilon) + y(s_1)$ (29)

$$y(d_1 + \varepsilon) = g(d_1 - \varepsilon) + j\,[b(d_1 - \varepsilon) - \operatorname{cotg} \beta s_1] \tag{30}$$

• à la distance $d - \varepsilon$: $y(d - \varepsilon) = \dfrac{y(d_1 + \varepsilon) + j \operatorname{tg} \beta d_2}{1 + j\, y(d_1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \beta d_2}$ (31)

→ Dans cette expression, l'inconnue est s_1 ; nous écrirons :

$$y(d - \varepsilon) = g(d - \varepsilon) + j\, b(d - \varepsilon) \tag{32}$$

• à la distance $(d + \varepsilon)$: $y(d + \varepsilon) = y(d - \varepsilon) + y(s_2)$ (33)

$$y(d + \varepsilon) = g(d - \varepsilon) + j\,[b(d - \varepsilon) - \operatorname{cotg} \beta s_2] \tag{34}$$

→ Dans cette expression, les inconnues sont s_1 et s_2.

Pour que l'adaptation soit réalisée à partir de la distance $d + \varepsilon$, il faut que $y(d + \varepsilon) = 1 + j\,0$. D'où les conditions :

① $$g(d - \varepsilon) = 1 \tag{35}$$

L'explicitation de cette relation fournit une équation du second degré en $\operatorname{cotg} \beta s_1$ à partir de laquelle on calcule, si son déterminant est > 0, deux solutions s_1' et s_1''.

② $$b(d - \varepsilon) = \operatorname{cotg} \beta s_2 \tag{36}$$

C'est une équation du premier degré en $\operatorname{cotg} \beta s_2$. Donc, aux deux valeurs s_1' et s_1'' de s_1 correspondent les deux valeurs s_2' et s_2'' de s_2.

Il y a donc, dans ce cas également, deux couples de solutions :

$$(s_1', s_2') \text{ et } (s_1'', s_2'')$$

5.6 UTILISATION DU DIAGRAMME DE SMITH

La recherche des inconnues dans les adaptations à un et à deux stubs est bien simplifiée si l'on utilise le diagramme de Smith.

5.6.1 Adaptation à un stub (fig. 8)

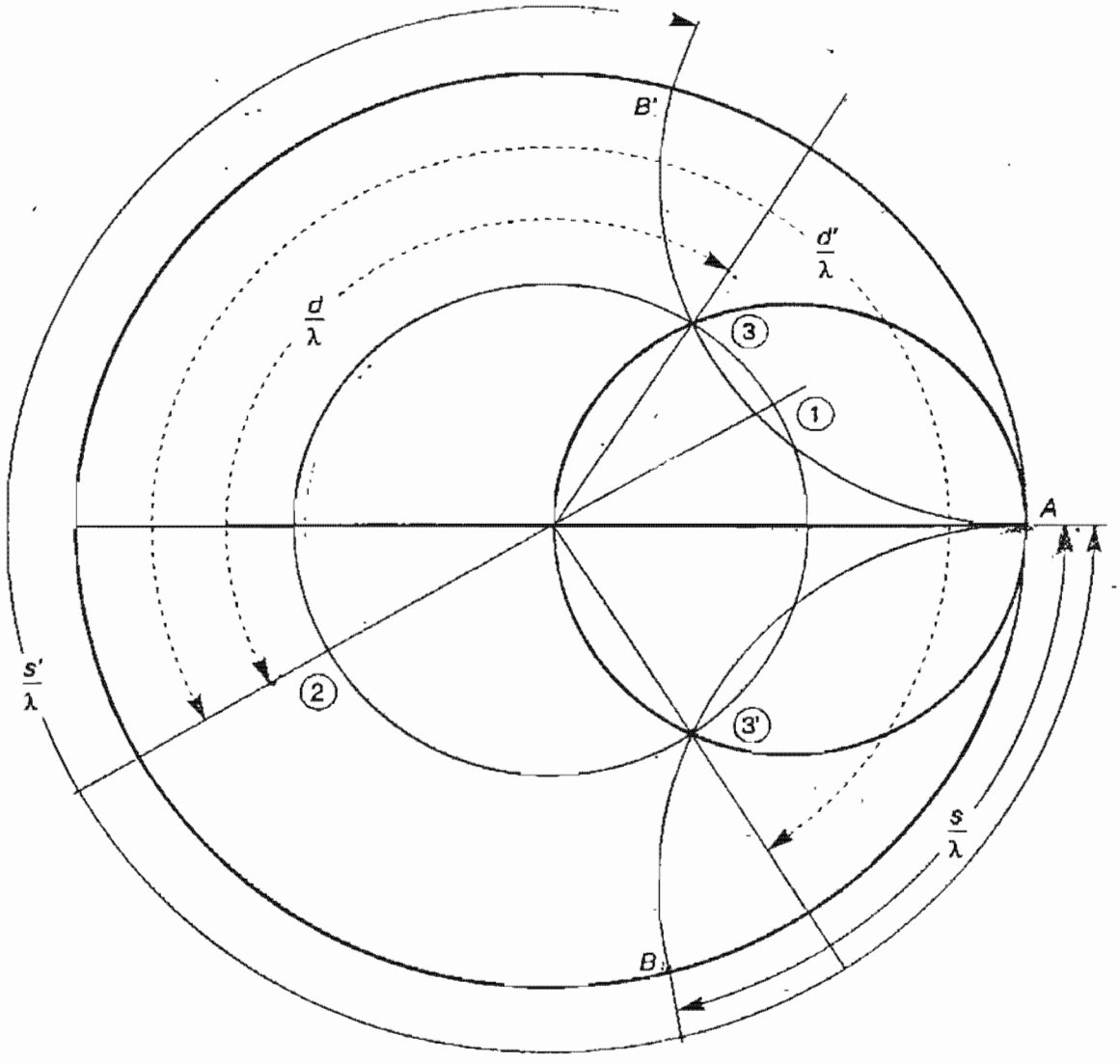


Figure 8.
Adaptation à un stub.

Point 1 : $z_1 = 2 + j\ 1{,}5$
Point 2 : $y_2 = 0{,}32 - j\ 0{,}24$
Point 3 : $y_3 = 1 + j\ 1{,}3$; $d/\lambda = 0{,}212$
Point B : $y(s) = -j\ 1{,}3 \rightarrow s/\lambda = 0{,}104$
Point 3' : $y_{3'} = 1 - j\ 1{,}3$; $d'/\lambda = 0{,}372$
Point B' : $y(s') = j\ 1{,}3 \rightarrow s'/\lambda = 0{,}396$

Plaçons tout d'abord les points 1 et 2 représentatifs des impédance et admittance réduites de la charge. Le cercle à R.O.S. = cte passant par ces points est le lieu des points représentatifs de toutes les impédances et admittances aux divers points de la ligne compris entre la charge et le stub exclu. C'est, en particulier, un lieu de $y\ (d - \varepsilon)$.

Comme d'autre part $y\ (d - \varepsilon) = y\ (d + \varepsilon) - y\ (s)$ est de la forme $1 - j\ b$, le cercle à $g = 1$ est un deuxième lieu de $y\ (d - \varepsilon)$.

Les solutions du problème sont donc données par les deux points d'intersection 3 et 3' de ces deux cercles.

a) Point 3

Le stub doit être placé à une distance d/λ de la charge qui est lue sur le bord du diagramme. (Dans l'exemple choisi : $d/\lambda = 0{,}042 + 0{,}170 = 0{,}212$.)

Soit $1 + j\,b_3$ l'admittance à $y\,(d - \varepsilon)$; le stub doit avoir une longueur s telle que : $y\,(s) = -j\,b_3$ (ici $= -j\,1{,}3$). Comme le stub est un tronçon de ligne court-circuité, s est déterminé en lisant sur le bord du diagramme de combien il faut tourner (vers le générateur) pour passer du point A ($y = \infty$) au point B ($y = -j\,b_3$). Ici $s/\lambda = 0{,}354 - 0{,}250 = 0{,}104$.

b) Point 3'

Le stub doit être placé à une distance d'/λ. (Ici $d'/\lambda = 0{,}042 + 0{,}33 = 0{,}372$). L'admittance à $y\,(d' - \varepsilon)$ étant $1 - j\,b_3$, le stub doit avoir une longueur s' telle que $y\,(s') = +j\,b_3$ (ici $+j\,1{,}3$). s' est déterminé en lisant sur le bord du diagramme de combien il faut tourner (vers le générateur) pour passer du point A au point $B'(\Leftrightarrow 0 + j\,b_3)$. Ici $s'/\lambda = 0{,}250 + 0{,}146 = 0{,}396$.

5.6.2 Adaptation à deux stubs (fig. 9)

Il faut d'abord placer les points 1 et 2 représentatifs des impédance et admittance réduites de la charge et déduire de 2, par une rotation de d_1/λ vers le générateur (ici $d_1/\lambda = 0{,}122$), le point 3 représentatif de $y\,(d_1 - \varepsilon)$.

Nous avons vu que les parties réelles de $y\,(d_1 + \varepsilon)$ et $y\,(d_1 - \varepsilon)$ étaient les mêmes. Un lieu de $y\,(d_1 + \varepsilon)$ est donc le cercle à partie réelle constante (ici, $g_1\,(d - \varepsilon) = 0{,}3$) passant par 3.

De même, les parties réelles de $y\,(d + \varepsilon)$ et $y\,(d - \varepsilon)$ étant identiques et égales à 1, le cercle à $g = 1$ est un lieu de $y\,(d - \varepsilon)$. Il est facile d'en déduire un lieu de $y\,(d_1 + \varepsilon)$ car, dans un déplacement le long de la ligne, le point O reste invariant ; il suffit donc de trouver le point A' qui se déduit de A par une rotation de d_2/λ vers la charge (ici $d_2/\lambda = 0{,}180$) et l'on peut alors tracer le cercle de diamètre OA' qui est un deuxième lieu de $y\,(d_1 + \varepsilon)$.

Les points 4' et 4" qui se trouvent à l'intersection des deux lieux de $y\,(d_1 + \varepsilon)$ vont nous permettre de calculer les longueurs possibles s_1' et s_1'' du premier stub. Nous avons, en effet, puisque :

$$y\,(d_1 + \varepsilon) = y\,(d_1 - \varepsilon) + y\,(s_1)$$

$$y\,(s_1') = y_{4'} - y_3 \quad \text{et} \quad y\,(s_1'') = y_{4''} - y_3$$

Il suffit de lire sur le bord du diagramme, en tournant vers le générateur, quelles sont les distances s_1'/λ et s_1''/λ qu'il y a entre le point A et les points B' et B'' représentatifs de $y\,(s_1')$ et $y\,(s_1'')$.

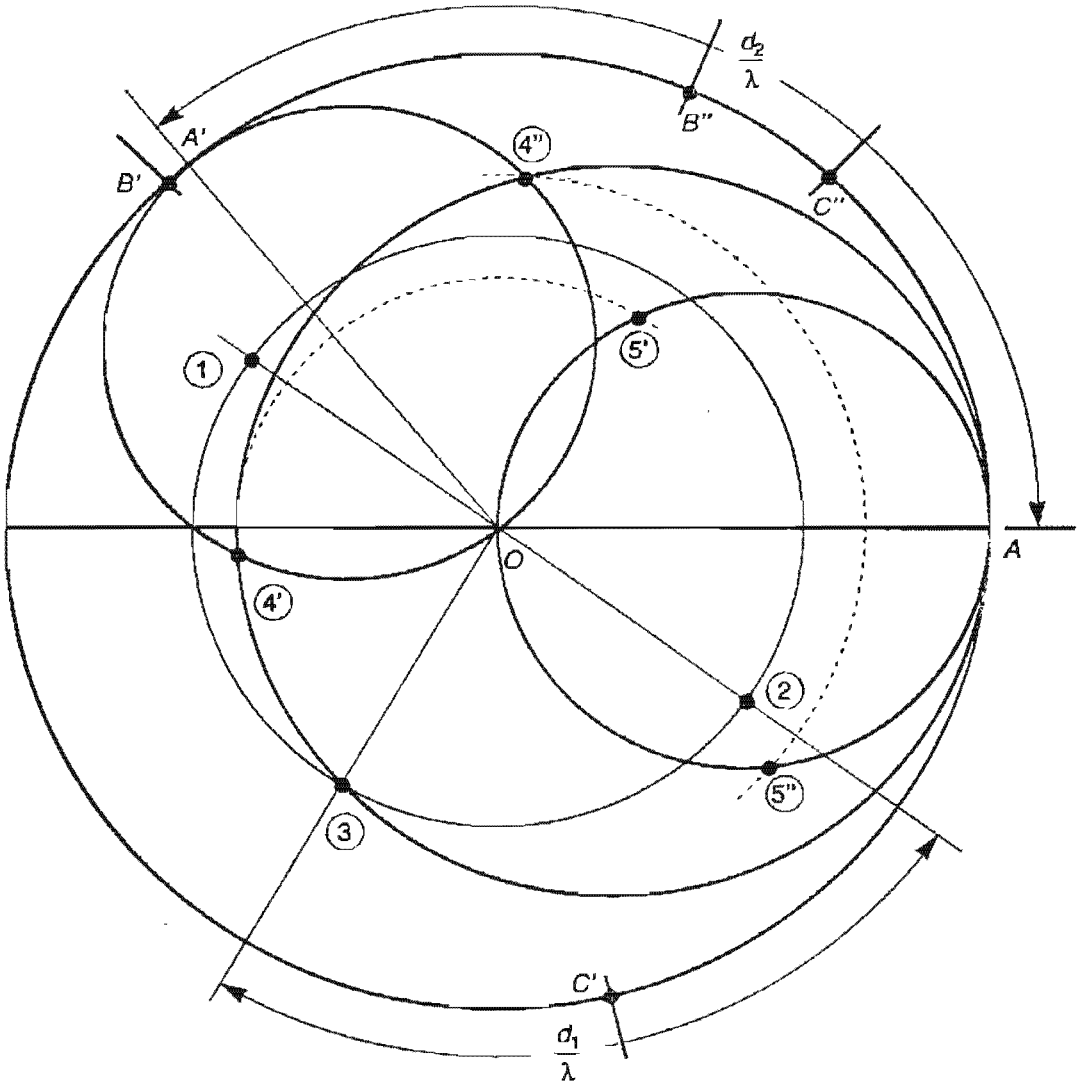


Figure 9. Adaptation à deux stubs

Point 1 : $z_1 = 0{,}26 + j\,0{,}3$ Point 2 : $y_2 = 1{,}65 - j\,1{,}9$
$d_1/\lambda = 0{,}122 \rightarrow$ Point 3 : $y_3 = 0{,}3 - j\,0{,}5$; $d_2/\lambda = 0{,}180 \rightarrow$ Point A'.
Point 4' : $y_{4'} = 0{,}3 - j\,0{,}06$. Point 4'' : $y_{4''} = 0{,}3 + j\,1$
Point B' : $y(s'_1) = j\,0{,}44 \rightarrow s'_1/\lambda = 0{,}316$
Point B'' : $y(s''_1) = j\,1{,}5 \rightarrow s''_1/\lambda = 0{,}406$
Point 5' : $y_{5'} = 1 + j\,1{,}28$ Point C' : $y(s'_2) = -j\,1{,}28 \rightarrow s'_2/\lambda = 0{,}105$
Point 5'' : $y_{5''} = 1 - j\,2{,}2$ Point C'' : $y(s''_2) = j\,2{,}2 \rightarrow s''_2/\lambda = 0{,}432$

Dans cet exemple $y(s'_1) = j\,0{,}44 \rightarrow s'_1/\lambda = 0{,}250 + 0{,}066 = 0{,}316$ et $y(s''_1) = j\,1{,}5 \rightarrow s''_1/\lambda = 0{,}250 + 0{,}156 = 0{,}406$.

Les points 5' et 5'' qui se déduisent de 4' et 4'' par la rotation de d_2/λ vers le générateur représentent les deux valeurs possibles de $y\,(d - \varepsilon)$ et appartiennent au cercle $g = 1$.

$y_{5'} = 1 + j\,b_{5'}$ et $y_{5''} = 1 + j\,b_{5''}$.

Les longueurs du second stub qui peuvent conduire à l'adaptation finale sont donc s'_2 et s''_2 telles que : $y(s'_2) = -j\,b_5$ et $y(s''_2) = -j\,b_5$. (Ici, $y(s'_2) = -j\,1{,}28$ et $y(s''_2) = j\,2{,}2$).

À ces valeurs correspondent les points C' et C'' sur les bords du diagramme ; on en déduit s'_2 et s''_2.

Dans cet exemple $y(s'_2) = -j\,1{,}28 \rightarrow s'_2/\lambda = 0{,}355 - 0{,}250 = 0{,}105$ et $y(s''_2) = j\,2{,}2 \rightarrow s''_2/\lambda = 0{,}250 + 0{,}182 = 0{,}432$.

5.7 ADAPTATION PAR RÉSEAU D'IMPÉDANCES ET TRONÇON DE LIGNE

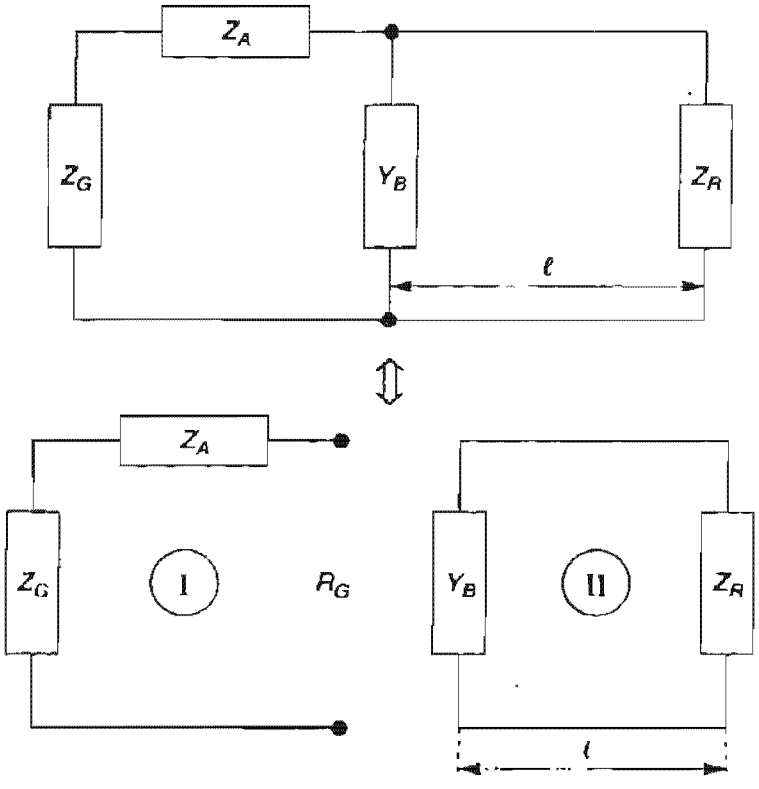


Figure 10. Adaptation par réseau d'impédances et tronçon de ligne.

Dans les cas que nous avons traités aux paragraphes précédents, il s'agissait d'adapter une charge d'impédance Z_R complexe à un générateur d'impédance interne Z_G réelle et égale à l'impédance caractéristique de la ligne qui le relie à la charge.

Le cas le plus général est celui où l'on veut adapter une charge d'impédance Z_R complexe à un générateur d'impédance interne Z_G complexe (fig. 10).

Pour effectuer cette adaptation, on peut placer en série avec le générateur une impédance imaginaire pure $Z_A = j\,X$ afin de compenser la partie imaginaire de l'impédance interne du générateur. Cette réactance peut être obtenue en plaçant en série avec le générateur soit un stub soit un composant passif inductif ou capacitif. Ainsi, l'impédance ramenée aux bornes du réseau *I* est R_G.

D'autre part, on place en parallèle à une distance ℓ de la charge une admittance imaginaire pure $Y_B = j\,B$ qui peut être obtenue en mettant en parallèle sur la ligne soit un stub soit un composant passif inductif ou capacitif. Le réseau II constitue l'équivalent d'un dispositif d'adaptation à un stub qui doit ramener à ses bornes une impédance égale à R_G, ce qui réalise l'adaptation désirée.

Notons enfin que lorsque la distance ℓ entre Z_G et Z_R est imposée, il est toujours possible d'utiliser, conformément au schéma de la figure 3, deux dispositifs d'adaptation l'un placé entre la charge et la ligne, l'autre placé entre le générateur et la ligne.

EXERCICES

EXERCICE 5.1

(Paragraphe 5.3 – Adaptation par ligne quart d'onde)

Une ligne de transmission est composée de trois tronçons comme cela est représenté sur la figure 11. L'impédance de charge Z_R est constituée par une résistance de 50 Ω en série avec une inductance de $2 \cdot 10^{-8}$ H. Les deux tronçons extrêmes ont pour impédance caractéristique $Z_c = 100\ \Omega$. Le tronçon central a une longueur $\ell_2 = 15$ cm et est placé à une distance ℓ_1 de Z_R ; $v = c$.

1) La fréquence étant de 500 MHz, déterminer la plus petite valeur de ℓ_1 conduisant à l'adaptation de l'ensemble et la valeur correspondante de Z'_c.

2) La fréquence étant de 600 MHz, déterminer z_2 et le R.O.S. apparent de l'ensemble, si l'on ne retouche pas aux valeurs de Z'_c et de ℓ_1 trouvées précédemment.

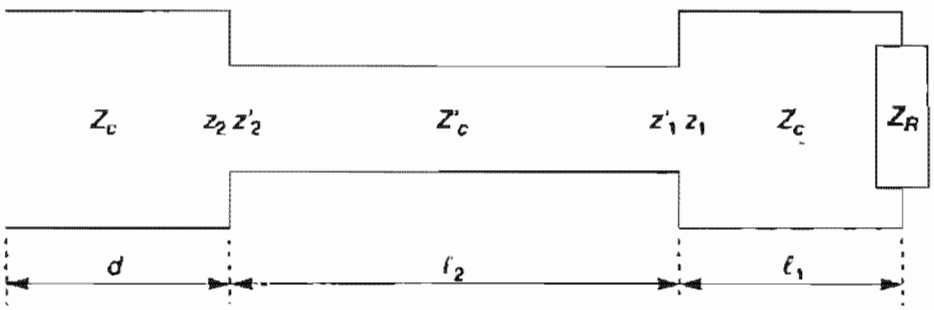


Figure 11.

EXERCICE 5.2

(Paragraphe 5.2 – Conditions d'adaptation)

Un générateur à transistor a une impédance interne $Z_G = (7{,}5 + j\ 11)\ \Omega$ (voir fig. 12). Il est relié à une ligne de longueur ℓ et d'impédance caractéristique Z_c qui est la moyenne géométrique entre 50 Ω et la partie réelle de Z_G. La charge est un dispositif d'impédance $Z_R = 50\ \Omega$ avec lequel est mis en série un condensateur d'adaptation, de capacité C. On demande de calculer ℓ et C pour que l'adaptation soit réalisée à la fréquence de 2,45 GHz.

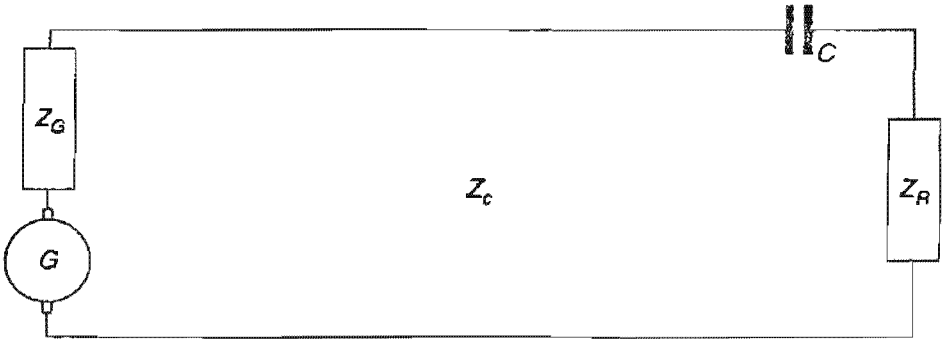


Figure 12.

EXERCICE 5.3

(Paragraphes 5.4 et 5.6.1 – Adaptation à l'aide d'un stub)

Une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$ est terminée par une impédance $Z_R = (100 + j\ 75)\ \Omega$. La longueur d'onde est de 0,5 m. Déterminer les caractéristiques d'une adaptation par un stub de longueur s, situé à une distance d de charge et d'impédance caractéristique 50 Ω.

EXERCICE 5.4

(Paragraphes 5.4 et 5.6.1 – Adaptation à l'aide d'un stub)

Une ligne coaxiale à diélectrique air, d'impédance caractéristique $Z_c = 50\ \Omega$ est terminée par une impédance $Z_R = (15 - j\ 42{,}5)\ \Omega$. La fréquence est de 1 GHz.

On veut réaliser l'adaptation en plaçant, à une distance d de la charge, un stub en circuit-ouvert, d'impédance caractéristique $Z_c' = 100\ \Omega$ et de longueur s.

Déterminer les caractéristiques de cette adaptation.

EXERCICE 5.5

(Paragraphes 5.5 et 5.6.2 – Adaptation à l'aide de 2 stubs)

Une ligne d'impédance caractéristique 50 Ω est terminée par une impédance $Z_R = (100 - j\ 125)\ \Omega$. La longueur d'onde est de 0,5 m. On veut réaliser l'adaptation en utilisant deux stubs en court-circuit d'impédance caractéristique 50 Ω. Le premier est placé à 6 cm de la charge et le second est à 15 cm du premier.

Déterminer les longueurs des stubs qui conduisent à l'adaptation.

EXERCICE 5.6

Une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 100\ \Omega$ est terminée par une impédance de charge $Z_R = 150 - j\ 120$. On veut adapter cette impédance à l'aide de deux stubs court-circuités : le premier en parallèle sur la charge et le deuxième placé à $\lambda/8$ en série avec la ligne.

Déterminer les longueurs s_1 et s_2 de ces deux stubs qui conduisent à l'adaptation.

EXERCICE 5.7

(Paragraphe 5.7 – Adaptation par réseau d'impédances et tronçon de ligne)

Un générateur d'impédance interne $Z_G = 50\ \Omega$ doit alimenter un amplificateur à transistor dont l'impédance d'entrée est $Z_e = (4 + j\ 2)\ \Omega$, à la fréquence de 600 MHz. Afin de permettre une transmission de puissance optimale, on utilise un circuit d'adaptation (fig. 13) constitué d'une capacité C_s série et d'une capacité parallèle C_p.

Entre ce circuit et l'amplificateur, il y a une ligne microbande d'impédance caractéristique $Z_c = 40\ \Omega$, de longueur $\ell = 2$ cm sur laquelle $\lambda = 25$ cm. Trouver les valeurs de C_s et de C_p pour que l'adaptation soit réalisée.

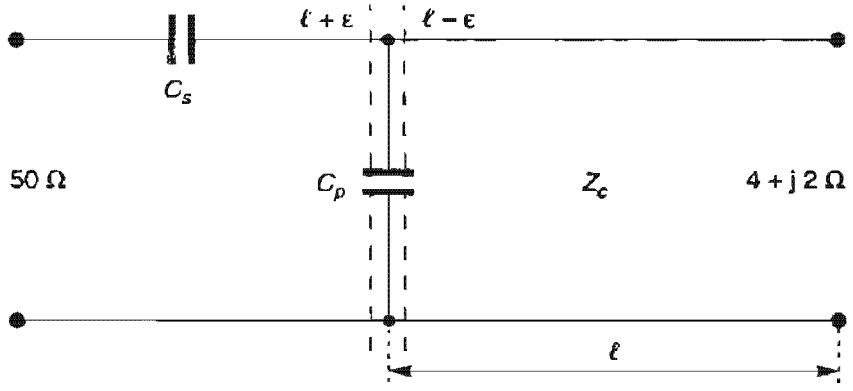


Figure 13.

Chapitre 6

Lignes avec pertes

6.1 ÉTUDE DU PARAMÈTRE DE PROPAGATION ET DE L'IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE

6.1.1 Expression de α, β et Z_c

Dans le chapitre « Propagation sur une ligne », nous avons montré que l'expression du paramètre de propagation γ était : $\gamma = \sqrt{(R_1 + j\,L_1\,\omega)\,(G_1 + j\,C_1\,\omega)}$.

C'est une quantité complexe que nous avons écrite sous la forme : $\gamma = \alpha + j\,\beta$.

Il est, dès lors, facile de calculer les expressions de α et β en remarquant que :

- d'une part : $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\,j\,\alpha\beta$
- d'autre part : $\gamma^2 = (R_1\,G_1 - L_1\,C_1\,\omega^2) + j\,\omega\,(L_1\,G_1 + R_1\,C_1)$.

En identifiant :

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_1\,G_1 - L_1\,C_1\,\omega^2$$

$$2\alpha\beta = \omega\,(L_1\,G_1 + R_1\,C_1)$$

d'où :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R_1^2 + L_1^2\,\omega^2)\,(G_1^2 + C_1^2\,\omega^2)} + (R_1\,G_1 - L_1\,C_1\,\omega^2)\right]} \qquad (1)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R_1^2 + L_1^2\,\omega^2)\,(G_1^2 + C_1^2\,\omega^2)} - (R_1\,G_1 - L_1\,C_1\,\omega^2)\right]} \qquad (2)$$

Pour ce qui est de Z_c dont l'expression est : $\sqrt{\dfrac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}}$ nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_1 G_1 + L_1 C_1 \omega^2 + j \omega (L_1 G_1 - R_1 C_1)}{G_1^2 + C_1^2 \omega^2}} \tag{3}$$

Les expressions trouvées pour α, β et Z_c sont générales, mais difficilement utilisables. Elles se simplifient beaucoup dans le cas des lignes à faibles pertes qui est très important pour les applications, notamment en télécommunications.

6.1.2 Cas des lignes à faibles pertes

Il est alors possible de négliger α^2 et $R_1 G_1$; nous avons :

$$-\beta^2 = -L_1 C_1 \omega^2$$

$$2\alpha\beta = \omega (L_1 G_1 + R_1 C_1).$$

D'où :

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1} \tag{4}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \tag{5}$$

et :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \right) \tag{6}$$

Notons que v est indépendante de la fréquence : un signal se propagera donc sur la ligne sans distorsion (voir § 6.2.2)

D'après (3) et en négligeant $R_1 G_1$ et G_1^2, nous obtenons :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{1 + j \frac{G_1}{C_1 \omega} - j \frac{R_1}{L_1 \omega}} \tag{7}$$

De plus, si les pertes dans le diélectrique sont négligeables par rapport aux pertes dans les conducteurs, on pourra supprimer dans (6) et (7) le terme en G_1.

6.1.3 Minimisation des pertes

Pour que α soit minimale, il faut que $d\alpha^2/dL_1 = 0$.

Soit :

$$\sqrt{\frac{G_1^2 + C_1^2 \omega^2}{R_1^2 + L_1^2 \omega^2}} L_1 \omega^2 - C_1 \omega^2 = 0$$

De cette relation, on déduit la célèbre condition de Heaviside :

$$L_1 G_1 = R_1 C_1 \qquad (8)$$

alors :

$$\alpha = \sqrt{R_1 G_1} \qquad (9)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1} \quad (4) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (5)$$

6.2 IMPORTANCE DE LA CONDITION D'HEAVISIDE – MOYENS DE LA RÉALISER

Voyons combien la réalisation de cette condition est importante à propos d'un exemple simple : la transmission d'un signal radioélectrique représentant la voix humaine dans une liaison téléphonique par câble.

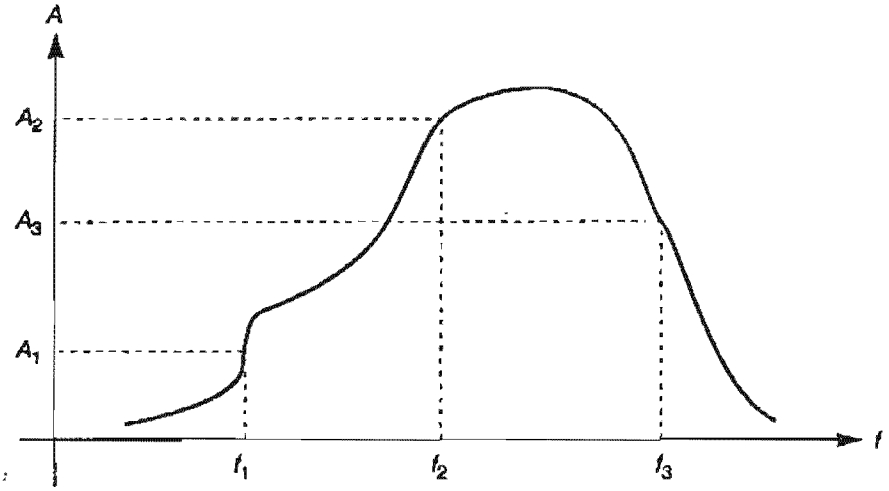


Figure 1.
Courbe amplitude-fréquence d'un signal, appelée « spectre de fréquences ».

On sait qu'à un instant donné, ce signal a un spectre de fréquences bien défini ; c'est-à-dire que si l'on trace la courbe amplitude-fréquence qui lui correspond, nous trouvons à des fréquences $f_1, f_2, f_3 \ldots$ des amplitudes qui ont respectivement pour valeurs $A_1, A_2, A_3 \ldots$ (fig. 1).

6.2.1 La distorsion d'amplitude

Si l'amortissement dû à la propagation est indépendant de la fréquence, nous avons à la réception des amplitudes $A'_1, A'_2, A'_3 \ldots$ correspondant respectivement aux fréquences $f_1, f_2, f_3 \ldots$ et $A'_1/A_1 = A'_2/A_2 = A'_3/A_3 = \ldots$

Autrement dit, les amplitudes relatives sont conservées et le spectre de fréquences du signal à la réception est le même qu'à l'émission.

Si, en revanche, l'affaiblissement α dépendait de la fréquence, la précédente relation ne serait plus vérifiée et le spectre de fréquences du signal à la réception ne serait plus le même qu'à l'émission. La conséquence pratique en est une déformation de la voix humaine. Dans un tel cas, on dit qu'il y a « distorsion d'amplitude ».

Pour combattre la distorsion d'amplitude, dont aucun câble n'est rigoureusement exempt, il faut disposer à l'arrivée des filtres de fréquences du type passe-bande afin de découper le signal par bandes de fréquences, puis amplifier chacune de ces bandes de telle sorte que le coefficient d'amplification A dépende de la fréquence et vérifie la relation : $\alpha(f) \cdot A(f) = \text{cte} \; \forall f$.

6.2.2 La distorsion de phase

Le fait que la vitesse de propagation soit indépendante de la fréquence implique que les différentes fréquences composant un signal émis à un instant t seront toutes reçues au même instant t', ce qui est la condition nécessaire à la reconstitution d'un spectre de fréquences identique à celui du signal émis pourvu, bien sûr, qu'il n'y ait pas eu distorsion d'amplitude ou qu'elle ait été corrigée.

Mais si v dépendait de la fréquence, cela signifierait que les composantes du spectre de fréquences reconstitué à un instant t' n'ont pas été émises au même instant. Il en résulterait une impossibilité de reconstituer le spectre de fréquences correspondant au son émis à l'instant t d'où une inaudibilité totale de la voix humaine. Cela s'appelle la « distorsion de phase ». Elle est beaucoup plus grave que la distorsion d'amplitude car les moyens à mettre en œuvre pour la compenser (disposer dans chaque bande de fréquences des lignes à retard variables) sont beaucoup plus onéreux.

6.2.3 Moyens de réaliser la condition d'Heaviside

Pour les communications téléphoniques à courte, moyenne et longue distance par câbles urbains, interurbains et intercontinentaux ou transocéaniques, les câbles utilisés sont, en général, tels que $L_1 G_1 \ll R_1 C_1$. Des procédés bien éprouvés sont employés pour satisfaire la condition d'Heaviside en augmentant L_1 : ce sont la « pupinisation » et la « krarupisation ».

a) La « pupinisation »

Elle est d'un usage courant sur les lignes téléphoniques terrestres, urbaines et interurbaines. Elle consiste à augmenter L_1 en moyenne en intercalant à inter-

valles réguliers des inductances en série avec la ligne ; en France, l'espace est de 955 m ou 1 830 m. Tant que l'on n'approche pas trop des fréquences pour lesquelles λ serait de l'ordre de l'espacement d des bobines de charge, tout se passe comme si l'on avait augmenté L_1 de manière continue. En fait, la théorie montre que la condition de validité de ce procédé est : $\lambda \gg \pi d$.

b) La « krarupisation »

Elle est utilisée pour les câbles téléphoniques intercontinentaux ; elle consiste à enrouler autour du ou des conducteurs de la ligne, un ruban de permalloy de 0,2 à 0,3 mm d'épaisseur en une spirale aussi serrée que possible.

6.3 EXPRESSIONS DE LA TENSION DU COURANT ET DE L'IMPÉDANCE

Au chapitre 3, nous avons établi les expressions de la tension, du courant et de l'impédance en un point d'une ligne fermée sur une charge Z_R caractérisée par son coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_R = \Gamma_R e^{j\varphi}$. Dans le cas où l'origine est prise sur cette charge, axe des x orienté vers le générateur :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i (e^{\gamma x} + \underline{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \tag{10}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i (e^{\gamma x} - \underline{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \tag{11}$$

$$Z(x) = Z_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}}{1 - \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}} \tag{12}$$

L'impédance en valeur réduite est donc :

$$z(x) = \frac{1 + \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}}{1 - \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}} \tag{13}$$

En prenant un argument complexe $\theta = \theta' + j\,\theta''$ tel que :

$$-e^{-2\theta} = \Gamma_R e^{j\varphi} \tag{14}$$

$$z(x) = \frac{1 - e^{-2\theta} e^{-2\gamma x}}{1 + e^{-2\theta} e^{-2\gamma x}} = \text{th}\,(\theta + \gamma x) \tag{15}$$

Nous avons donc mis $z(x)$ sous une forme particulièrement simple. Il en est de même pour $\underline{V}(x)$ et $\underline{I}(x)$ lorsque l'on remplace $\underline{\Gamma}_R$ par $-e^{-2\theta}$:

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i (e^{\gamma x} - e^{-2\theta} e^{-\gamma x}) \tag{16}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i (e^{\gamma x} + e^{-2\theta} e^{-\gamma x}) \tag{17}$$

En mettant $e^{-\theta}$ en facteur, nous obtenons successivement :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i\, e^{-\theta}\,(e^{(\theta+\gamma x)} - e^{-(\theta+\gamma x)}) \tag{18}$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i\, e^{-\theta}\,(e^{(\theta+\gamma x)} + e^{-(\theta+\gamma x)}) \tag{19}$$

Soit finalement en amplitudes complexes :

$$\underline{V}(x) = 2\,\underline{V}_i\, e^{-\theta}\,\mathrm{sh}\,(\theta+\gamma x) \tag{20}$$

$$\underline{I}(x) = 2\,\underline{I}_i\, e^{-\theta}\,\mathrm{ch}\,(\theta+\gamma x) \tag{21}$$

et en valeurs efficaces :

$$V(x) = \sqrt{2}\;V_i\,|e^{-\theta}|\,\left|\mathrm{sh}\,(\theta+\gamma x)\right| = A\left|\mathrm{sh}\,(\theta+\gamma x)\right| \tag{22}$$

$$I(x) = \sqrt{2}\;I_i\,|e^{-\theta}|\,\left|\mathrm{ch}\,(\theta+\gamma x)\right| = \frac{A}{Z_c}\left|\mathrm{ch}\,(\theta+\gamma x)\right| \tag{23}$$

6.4 ÉTUDE DES VARIATIONS DE LA TENSION ET DU COURANT

Nous mènerons cette étude à partir des expressions (22) et (23) et prendrons comme exemple pour le calcul, la tension. En nous rappelant que : $\theta = \theta' + j\,\theta''$ et $\gamma = \alpha + j\,\beta$, nous avons successivement :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}\,(\theta+\gamma x) &= \mathrm{sh}\,[(\theta'+\alpha x) + j\,(\theta''+\beta x)]\\ &= \mathrm{sh}\,(\theta'+\alpha x)\,\mathrm{ch}\,j\,(\theta''+\beta x) + \mathrm{ch}\,(\theta'+\alpha x)\,\mathrm{sh}\,j\,(\theta''+\beta x)\\ &= \mathrm{sh}\,(\theta'+\alpha x)\cos(\theta''+\beta x) + j\,\mathrm{ch}\,(\theta'+\alpha x)\sin(\theta''+\beta x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{sh}\,(\theta+\gamma x)| &= [\mathrm{sh}^2(\theta'+\alpha x)\cos^2(\theta''+\beta x) + \mathrm{ch}^2(\theta'+\alpha x)\sin^2(\theta''+\beta x)]^{1/2}\\ &= [\{\mathrm{sh}^2(\theta'+\alpha x)\}\{1-\sin^2(\theta''+\beta x)\} + \mathrm{ch}^2(\theta'+\alpha x)\sin^2(\theta''+\beta x)]^{1/2}\\ &= [\mathrm{sh}^2(\theta'+\alpha x) + \sin^2(\theta''+\beta x)]^{1/2}\end{aligned}$$

Soit :

$$V(x) = A\sqrt{\mathrm{sh}^2(\theta'+\alpha x) + \sin^2(\theta''+\beta x)} \tag{24}$$

De même :

$$I(x) = \frac{A}{Z_c}\sqrt{\mathrm{sh}^2(\theta'+\alpha x) + \cos^2(\theta''+\beta x)} \tag{25}$$

6.4.1 Cas général

Lorsque Z_R, c'est-à-dire $\theta = \theta' + j\,\theta''$ est quelconque, l'étude des variations de la tension peut se faire en remarquant que $V(x)$ est la somme :

- d'une fonction périodique $\sin^2(\theta'' + \beta x)$
- d'une fonction monotone $\mathrm{sh}^2(\theta' + \alpha x)$.

$V(x)$ pourra elle-même être considérée comme une fonction périodique à condition que la variation du sh^2 soit assez faible pendant que le $\sin^2$ varie entre un maximum et un minimum. Cela nécessite que la ligne ne présente pas de trop grandes pertes. Dans ces conditions, nous pouvons dire avec une bonne approximation (voir fig. 2) que :

- la périodicité des phénomènes est $\lambda/2$;
- les valeurs des maxima et des minima sont obtenues pour les valeurs de x telles que $\sin^2(\theta'' + \beta x) = 1$ ou 0. Soient x_M et x_m ces valeurs :

$$V_M = A \operatorname{ch}(\theta' + \alpha x_M) \quad (26)$$

$$V_m = A \operatorname{sh}(\theta' + \alpha x_m) \quad (27)$$

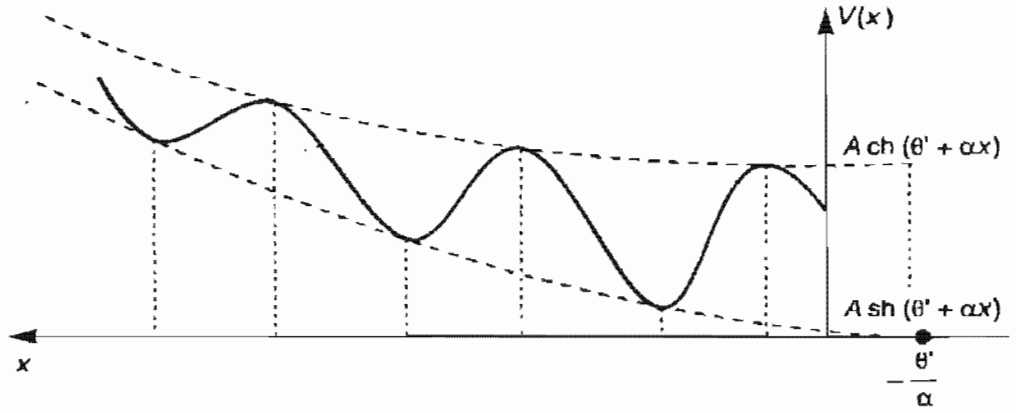


Figure 2.
Courbe des variations de la tension le long d'une ligne avec pertes : les enveloppes des maxima et des minima sont en $A \operatorname{ch}(\theta' + \alpha x)$ et $A \operatorname{sh}(\theta' + \alpha x)$.

Pour $I(x)$, le problème est identique. Les seules différences dans les résultats consistent en ce que :

- les amplitudes sont divisées par Z_c ;
- les variations sont en opposition de phase, puisque dans (25), $\cos^2(\theta'' + \beta x)$ remplace le $\sin^2(\theta'' + \beta x)$ de (24).

6.4.2 Cas particuliers

Nous ne reviendrons pas sur le cas où la ligne est terminée par son impédance caractéristique puisque l'étude du régime d'ondes progressives qui s'établit alors a été effectuée au chapitre 2 « Propagation sur une ligne en haute fréquence » en tenant compte du paramètre d'affaiblissement α. Restent donc à étudier les cas où $\underline{\Gamma}_R = +1$ et $\underline{\Gamma}_R = -1$. Nous allons déterminer dans chacun de ces cas les valeurs de θ, θ', θ'' et voir comment s'écrivent les relations (22), (23), (24), (25).

a) Ligne en court-circuit $Z_R = 0 \Rightarrow \underline{\Gamma}_R = -1$

Donc : $$-e^{-2\theta} = -1 \Rightarrow e^{-2\theta} = 1.$$

Ou : $$e^{-2\theta} = e^{-j2k\pi} \Rightarrow \theta = j\,k\pi.$$

Comme : $\theta = \theta' + j\,\theta''$, il vient : $\theta' = 0$ et $\theta'' = k\pi$.

(22) → $$V(x) = A\left|\text{sh}\,(\text{j}\,k\pi + \gamma x)\right| = A\left|\text{sh}\,\gamma x\right| \quad (28)$$

(23) → $$I(x) = \frac{A}{Z_c}\left|\text{ch}\,(\text{j}\,k\pi + \gamma x)\right| = \frac{A}{Z_c}\left|\text{ch}\,\gamma x\right| \quad (29)$$

(24) → $$V(x) = A\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \sin^2\,(k\pi + \beta x)} = A\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \sin^2\,\beta x} \quad (30)$$

(25) → $$I(x) = \frac{A}{Z_c}\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \cos^2\,(k\pi + \beta x)} = \frac{A}{Z_c}\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \cos^2\,\beta x} \quad (31)$$

D'après ces relations nous avons :

$$V_M = A\,\text{ch}\,\alpha x \quad (32) \qquad V_m = A\,\text{sh}\,\alpha x \quad (33)$$

$$I_M = \frac{A}{Z_c}\,\text{ch}\,\alpha x \quad (34) \qquad I_m = \frac{A}{Z_c}\,\text{sh}\,\alpha x \quad (35)$$

$$V\,(x = 0) = 0 \quad (36) \qquad I\,(x = 0) = \frac{A}{Z_c} \quad (37)$$

b) Ligne en circuit ouvert $Z_R = \infty \Rightarrow \underline{\Gamma}_R = +1$

Donc : $$-\,\text{e}^{-2\theta} = 1 \Rightarrow \text{e}^{-2\theta} = -1.$$

Ou : $$\text{e}^{-2\theta} = \text{e}^{-\text{j}\,(2k+1)\,\pi} \Rightarrow \theta = \text{j}\,(2k+1)\,\pi/2.$$

Comme : $\theta = \theta' + \text{j}\,\theta''$, il vient $\theta' = 0$ et $\theta'' = (2k+1)\,\pi/2$.

(22) → $$V(x) = A\left|\text{sh}\left|\text{j}\,(2k+1)\,\frac{\pi}{2} + \gamma x\right|\right| = A\left|\text{ch}\,\gamma x\right| \quad (38)$$

(23) → $$I(x) = \frac{A}{Z_c}\left|\text{ch}\left|\text{j}\,(2k+1)\,\frac{\pi}{2} + \gamma x\right|\right| = \frac{A}{Z_c}\left|\text{sh}\,\gamma x\right| \quad (39)$$

(24) → $$V(x) = A\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \sin^2\left|(2k+1)\,\frac{\pi}{2} + \beta x\right|} = A\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \cos^2\,\beta x} \quad (40)$$

(25) → $$I(x) = \frac{A}{Z_c}\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \cos^2\left|(2k+1)\,\frac{\pi}{2} + \beta x\right|} = \frac{A}{Z_c}\sqrt{\text{sh}^2\,\alpha x + \sin^2\,\beta x} \quad (41)$$

D'après ces relations nous avons :

$$V_M = A\,\text{ch}\,\alpha x \quad (32) \qquad V_m = A\,\text{sh}\,\alpha x \quad (33)$$

$$I_M = \frac{A}{Z_c}\,\text{ch}\,\alpha x \quad (34) \qquad I_m = \frac{A}{Z_c}\,\text{sh}\,\alpha x \quad (35)$$

$$V\,(x = 0) = A \quad (42) \qquad I\,(x = 0) = 0 \quad (43)$$

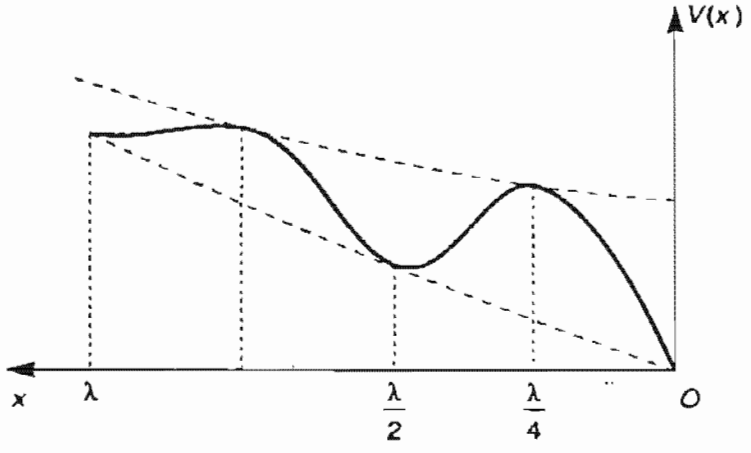


Figure 3.
Courbe des variations de la tension le long d'une ligne avec pertes court-circuitée.

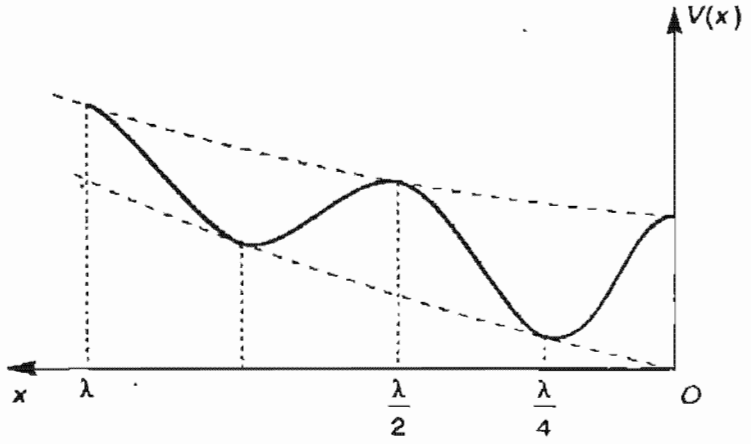


Figure 4.
Courbe des variations de la tension le long d'une ligne avec pertes en circuit ouvert.

Les courbes ci-dessus montrent les variations des amplitudes de la tension pour une ligne en court-circuit (fig. 3) et pour une ligne en circuit ouvert (fig. 4). Dans les deux cas, les variations de la tension sont comprises entre des courbes en ch αx et sh αx. Pour ce qui est des variations du courant, la figure 3 correspondrait au cas d'un circuit ouvert et la figure 4 au cas d'un court-circuit.

6.5 VARIATIONS DE L'IMPÉDANCE ET DU COEFFICIENT DE RÉFLEXION

6.5.1 Étude de l'impédance

D'après (20) et (21) : $$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_c \frac{\text{sh}\,(\theta + \gamma x)}{\text{ch}\,(\theta + \gamma x)} \qquad (44)$$

D'après (24) et (25) : $$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_c \frac{\sqrt{\text{sh}^2\,(\theta' + \alpha x) + \sin^2\,(\theta'' + \beta x)}}{\sqrt{\text{sh}^2\,(\theta' + \alpha x) + \cos^2\,(\theta'' + \beta x)}} \qquad (45)$$

En faisant la même approximation qu'au paragraphe 6.4.1 nous pouvons remarquer que :

- (45) est maximale lorsque $\sin^2(\theta'' + \beta x) = 1$ (et alors $\cos^2(\theta'' + \beta x) = 0$)

d'où $$Z_M = Z_c \frac{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\theta' + \alpha x)}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(\theta' + \alpha x)}} = Z_c \coth(\theta' + \alpha x) \qquad (46)$$

- (45) est minimale lorsque $\sin^2(\theta'' + \beta x) = 0$ (et alors $\cos^2(\theta'' + \beta x) = 1$)

d'où $$Z_m = Z_c \frac{\sqrt{\mathrm{sh}^2(\theta' + \alpha x)}}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\theta' + \alpha x)}} = Z_c \,\mathrm{th}(\theta' + \alpha x) \qquad (47)$$

Les variations de l'impédance s'effectuent donc, comme le montre la figure 5, entre les courbes représentatives de Z_c th $(\theta' + \alpha x)$ et de Z_c coth $(\theta' + \alpha x)$. Notons qu'à mesure que x augmente th $(\theta' + \alpha x)$ tend vers coth $(\theta' + \alpha x)$; il en résulte que $Z(x) \to Z_c$. Le rôle des pertes semble donc, à grande distance, d'adapter la ligne ; c'est évidement un procédé d'adaptation inadéquat.

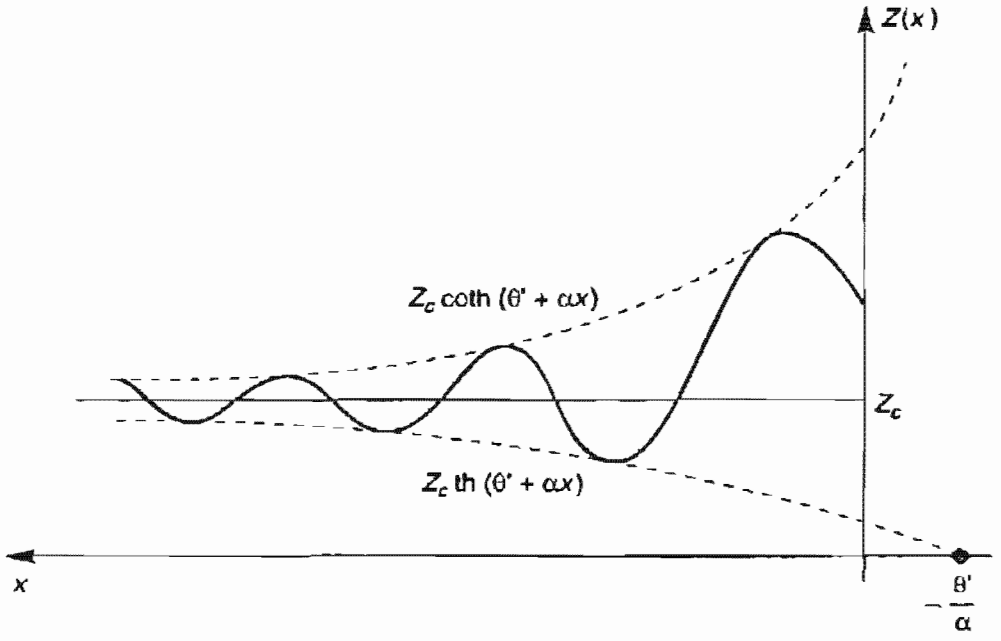


Figure 5. Courbe des variations de l'impédance le long d'une ligne avec pertes : les enveloppes des maxima et des minima sont en Z_c coth $(\theta' + \alpha x)$ et Z_c th $(\theta' + \alpha x)$.

6.5.2 Étude du coefficient de réflexion

Nous avons vu que : $$\underline{\Gamma}(x) = \frac{\underline{V}_r e^{-\gamma x}}{\underline{V}_i e^{\gamma x}} = \Gamma_R e^{j\varphi} e^{-2\gamma x}$$

Soit : $$\underline{\Gamma}(x) = \Gamma_R e^{-2\alpha x} e^{j(\varphi - 2\beta x)} \qquad (48)$$

- le module de $\underline{\Gamma}(x)$ est : $\Gamma_R e^{-2\alpha x}$
- l'argument de $\underline{\Gamma}(x)$ est : $\phi - 2\beta x$

La courbe représentative des variations de $\underline{\Gamma}(x)$ dans le plan complexe (fig. 6) est donc une spirale logarithmique qui coupe tous les rayons vecteurs sous le même angle et s'enroule asymptotiquement autour de l'origine lorsque x augmente indéfiniment.

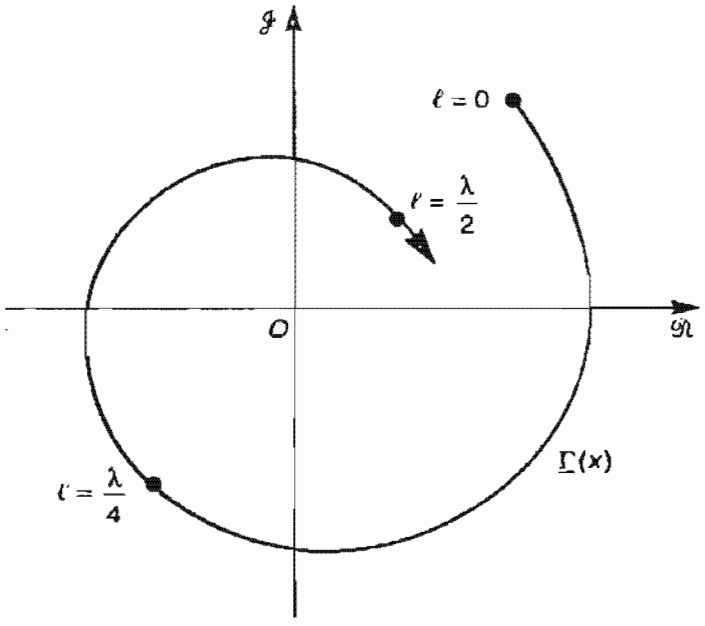


Figure 6.
Courbe des variations du coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}(x)$ dans le plan complexe.

6.6 PUISSANCE TRANSPORTÉE PAR UNE LIGNE

6.6.1 Relation donnant $P(x)$

Nous savons qu'en un point quelconque d'une ligne, dans le cas où l'origine des abscisses est prise au récepteur et l'axe orienté du récepteur vers le générateur :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}_i\,(e^{\gamma x} + \underline{\Gamma}_R\, e^{-\gamma x})$$
$$\underline{I}(x) = \underline{I}_i\,(e^{\gamma x} - \underline{\Gamma}_R\, e^{-\gamma x})$$

Par définition, la puissance active en ce point est donnée par :

$$P(x) = \frac{1}{2}\,\Re\,[\underline{V}(x)\cdot \underline{I}^*(x)]$$

Soit :
$$P(x) = \frac{V_i^2}{2\,Z_c}\,\Re\left[(e^{\gamma x} + \underline{\Gamma}_R\, e^{-\gamma x})\,(e^{\gamma x} - \underline{\Gamma}_R\, e^{-\gamma x})^*\right] \qquad (49)$$

Le terme entre crochets s'écrit successivement :

$$[e^{\alpha x}\, e^{j\,\beta x} + \Gamma_R\, e^{-\alpha x}\, e^{j(\phi - \beta x)}]\,[e^{\alpha x}\, e^{j\,\beta x} - \Gamma_R\, e^{-\alpha x}\, e^{j(\phi - \beta x)}]^*$$
$$[e^{\alpha x}\, e^{j\,\beta x} + \Gamma_R\, e^{-\alpha x}\, e^{j(\phi - \beta x)}]\,[e^{\alpha x}\, e^{-j\,\beta x} - \Gamma_R\, e^{-\alpha x}\, e^{-j(\phi - \beta x)}]$$
$$e^{2\alpha x} + \Gamma_R\, e^{j(\phi - 2\beta x)} - \Gamma_R\, e^{-j(\phi - 2\beta x)} - \Gamma_R^2\, e^{-2\alpha x}$$

dont la partie réelle est : $e^{2\alpha x} - \Gamma_R^2\, e^{-2\alpha x}$

D'où :
$$P(x) = \frac{V_i^2}{2\,Z_c}\,(e^{2\alpha x} - \Gamma_R^2\, e^{-2\alpha x}) \qquad (50)$$

6.6.2 Étude de la perte de puissance par transmission

À l'entrée de la ligne où $x = \ell$, la puissance fournie par le générateur est :

$$P(\ell) = \frac{V_i^2}{2 Z_c} (e^{2\alpha\ell} - \Gamma_R^2 e^{-2\alpha\ell})$$

À l'extrémité chargée où $x = 0$, la puissance absorbée par la charge est :

$$P(0) = \frac{V_i^2}{2 Z_c} (1 - \Gamma_R^2)$$

D'où la perte de puissance par transmission :

$$K = \frac{P(0)}{P(\ell)} = \frac{1 - \Gamma_R^2}{e^{2\alpha\ell} - \Gamma_R^2 e^{-2\alpha\ell}} = e^{-2\alpha\ell} \frac{1 - \Gamma_R^2}{1 - \Gamma_R^2 e^{-4\alpha\ell}} \qquad (51)$$

L'étude de K est délicate à faire car on ne peut séparer complètement l'influence de la ligne et l'influence de la désadaptation. En effet, K est le produit de trois termes :

- l'un, $e^{-2\alpha\ell}$ qui représente uniquement l'influence de la ligne ;
- l'autre, $1 - \Gamma_R^2$ qui représente uniquement l'influence de la désadaptation ;
- le dernier, $\frac{1}{1 - \Gamma_R^2 e^{-4\alpha\ell}}$ dans lequel les deux influences sont liées.

Les trois cas à considérer sont les suivants :

1. Si $\alpha = 0 \rightarrow K = 1$.
 Cela signifie que la puissance est la même en tous les points de la ligne comme le montre d'ailleurs la relation : $P(x) = (V_i^2/2Z_c)(1 - \Gamma_R^2)$ qui est indépendante de x et ne dépend que de Γ_R.

Remarque
Attention K *est un rapport de puissances et* α *est en Np/m.*

2. Si $\Gamma_R = 0 \rightarrow K = e^{-2\alpha\ell}$.
 Il y a sur la ligne une perte qui est exprimée :
 - en Nepers par : $(1/2) \ln K = \alpha\ell$ (52)
 - en Décibels par : $10 \log K = 8{,}68\ \alpha\ell$ (53)
3. Dans le cas général où $\alpha \neq 0$ et $\Gamma_R \neq 0$, il est intéressant de remarquer, par rapport au cas précédent, que l'influence de la désadaptation se traduit par l'apparition dans K d'un facteur :

$$\frac{1 - \Gamma_R^2}{1 - \Gamma_R^2 e^{-4\alpha\ell}} \qquad (54)$$

Les pertes totales, dans ce cas, sont donc la somme :

- des pertes propres à la ligne, dues à l'influence de α seul, qui apparaissent dans le facteur $e^{-2\alpha\ell}$ de la relation (51),
- des pertes causées par la désadaptation, dues à l'action conjuguée de α et Γ_R, qui apparaissent dans le facteur (54) suscité.

6.6.3 Étude de la perte de puissance par désadaptation

L'expression (54) représente l'augmentation de la perte due à une mauvaise adaptation de la ligne. L'abaque de la figure 7 permet de connaître directement, en décibels, cette perte par désadaptation. Le R.O.S. ρ, associé à la charge, est porté en abscisses et les pertes propres à la ligne en ordonnées. L'augmentation de perte due à la désadaptation de la ligne se lit sur les courbes cotées.

Par exemple, nous allons calculer la perte totale d'une ligne de 20 m, d'affaiblissement linéique $\alpha = 0{,}05$ dB/m, d'impédance caractéristique 320 Ω, fermée sur une résistance de 40 Ω. Nous avons $\alpha\ell = 0{,}05 \cdot 20 = 1$ dB et $\rho = 320/40 = 8$. Le point d'abscisse 8 et d'ordonnée 1 est situé sur la courbe 2. Cela signifie que la désadaptation de la ligne fait perdre 2 dB. Comme les pertes propres à la ligne sont de 1 dB ($\alpha\ell = 1$ dB), il en résulte que la perte totale sera de 3 dB.

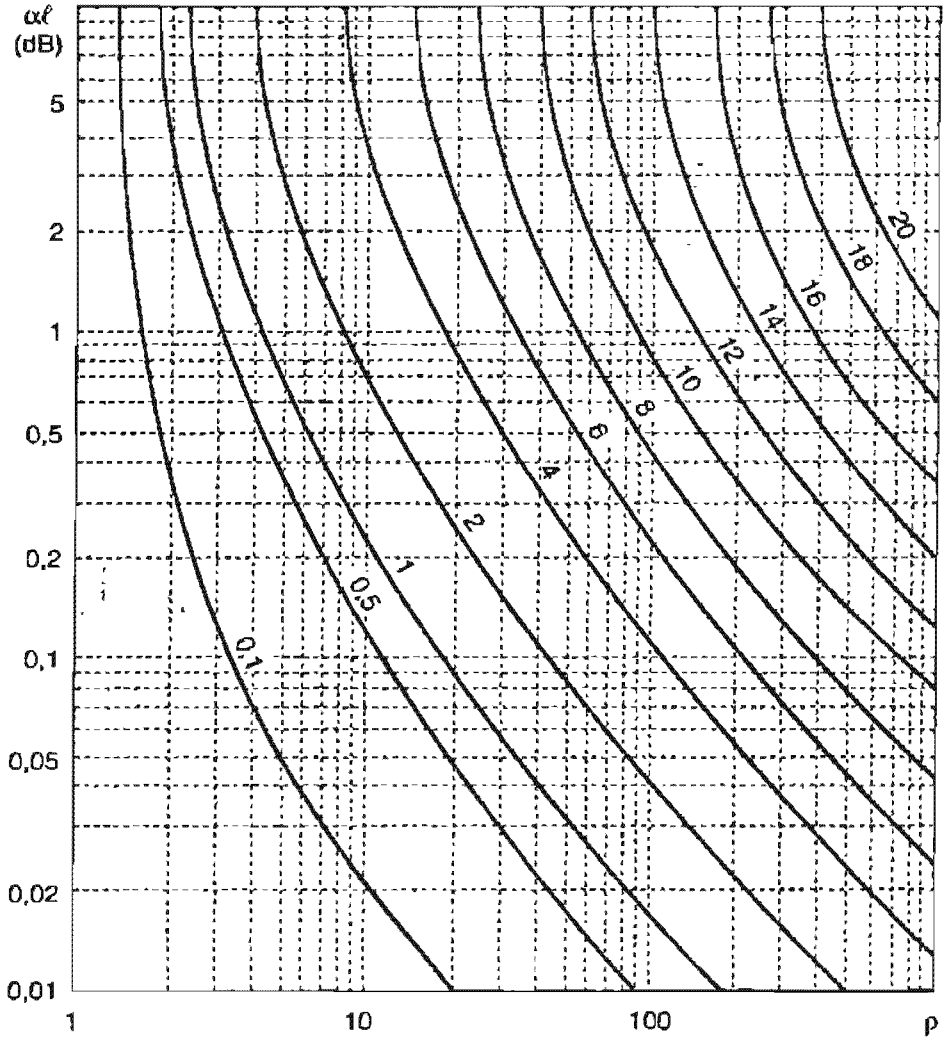


Figure 7.
Abaque donnant la perte par désadaptation d'une ligne à pertes désadaptée ; $\alpha\ell$ (dB) est la perte propre de cette ligne et ρ est le R.O.S. de la ligne.

D'après Roubine [25] « Lignes et antennes » p. 136, Éditions de la Revue d'Optique, Paris (1954).

EXERCICES

EXERCICE 6.1

(Paragraphe 6.1.1 – Étude du paramètre de propagation)

Démonstration des expressions (1) et (2) de α et β dans le cas général où l'on ne fait aucune approximation.

EXERCICE 6.2

(Paragraphe 6.1.2 – Cas des lignes à faibles pertes)

1) Dans l'hypothèse des lignes à faibles pertes, démontrer l'expression de Z_c en fonction de R_1, L_1, G_1, C_1.

2) Si de plus $G_1 = 0$, montrer qu'il est possible d'exprimer Z_c en fonction de L_1, C_1 et α, β.

EXERCICE 6.3

(Paragraphe 6.6.2 – Étude de la perte de puissance par transmission)

Pour une ligne avec pertes adaptée, de longueur ℓ, la perte relative de puissance par transmission est : $K = P(0)/P(\ell) = e^{-2\alpha\ell}$.

Exprimer K en Nepers et en Décibels.

Démontrer la relation de passage des Nepers aux Décibels.

EXERCICE 6.4

(Paragraphe 6.6.3 – Étude de la perte de puissance par désadaptation)

Calculer la perte totale d'une ligne de longueur $\ell = 10$ m, d'affaiblissement linéique $\alpha = 0{,}1$ dB/m, d'impédance caractéristique $Z_c = 300\ \Omega$, fermée sur une antenne d'impédance d'entrée $Z_R = 75\ \Omega$.

Même question si $Z_c = 75\ \Omega$ et $Z_R = 300\ \Omega$.

Chapitre 7

Lignes en régime impulsionnel

7.1 INTRODUCTION

Dans les précédents chapitres, nous avons toujours fait l'étude des lignes en régime sinusoïdal. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux phénomènes qui se produisent sur une ligne avec ou sans pertes en régime impulsionnel, c'est-à-dire lorsque la tension appliquée à l'entrée de la ligne varie de façon quasi instantanée de 0 à une valeur constante E, avant de revenir après un intervalle de temps τ, également de façon quasi instantanée, à la valeur 0. Si τ est nettement plus petit que le temps de propagation sur la ligne étudiée, nous dirons qu'il s'agit d'une impulsion de tension et, dans le cas contraire, d'un échelon de tension.

Cette étude est très utile car l'emploi des impulsions en hyperfréquences, en UHF et en VHF permet beaucoup d'applications pratiques dont les principales sont :

- la radionavigation, avec la plupart des radars ;
- les télécommunications où l'on utilise de plus en plus des systèmes de modulation par impulsion ;
- les méthodes de mesure des caractéristiques d'une ligne.

Cette étude est également très intéressante d'un point de vue pédagogique. La compréhension physique des phénomènes est, en effet, beaucoup plus aisée en régime impulsionnel où l'on peut distinguer (et au besoin visualiser) facilement les ondes incidentes et les ondes réfléchies qu'en régime sinusoïdal où l'on ne peut séparer l'onde incidente de l'onde réfléchie que par la pensée.

7.2 ÉTUDE EN RÉGIME D'IMPULSION DE TENSION

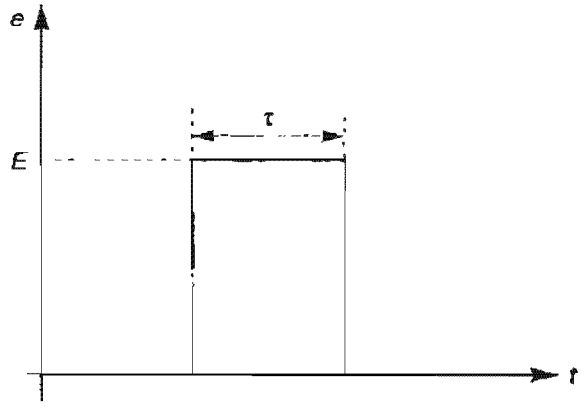


Figure 1. Impulsion de tension d'amplitude E, de durée τ.

L'impulsion peut se définir comme un signal (électrique, dans cette étude des lignes) ayant la forme indiquée à la figure 1 et dont la durée τ est très faible vis-à-vis des temps de propagation considérés. C'est ainsi que pour une ligne de 100 m de long sur laquelle la vitesse de propagation est de l'ordre de 200 000 km/s, un signal électrique ne pourra être vraiment considéré comme une impulsion que si : $\tau \ll T = 100/2 \cdot 10^8 = 0{,}5\ \mu s$.

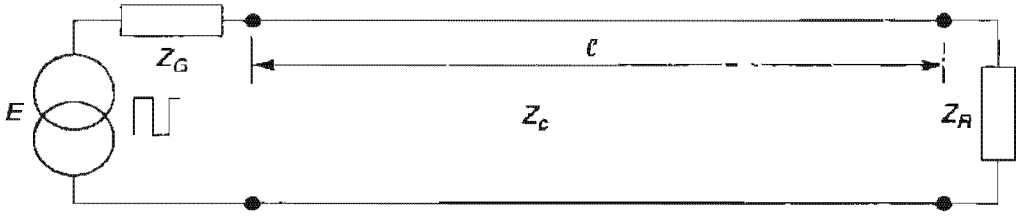


Figure 2. Générateur d'impulsions, ligne de longueur ℓ et impédance de charge.

Considérons une ligne d'impédance caractéristique Z_c, de longueur ℓ, terminée par une charge d'impédance Z_R (fig. 2). Nous supposons que cette ligne est alimentée par un générateur d'impulsions de force électromotrice E et d'impédance interne Z_G. Nous allons étudier deux cas fondamentaux.

7.2.1 Générateur adapté à la ligne – Z_R réelle

C'est le cas où $Z_G = Z_c$; le coefficient de réflexion à la jonction ligne-générateur est donc nul. En revanche, au niveau de la charge : $\Gamma_R = \dfrac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \neq 0$ puisqu'en général : $Z_R \neq Z_c$.

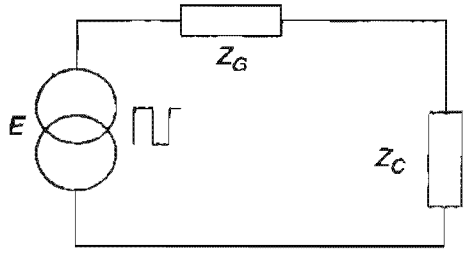


Figure 3. Réseau équivalent à l'instant $t = 0$.

La force électromotrice du générateur d'impulsion étant fixe, l'amplitude des impulsions qu'il va délivrer à l'entrée de la ligne dépend de l'impédance qui charge ce générateur. Or, à l'instant $t = 0$ où une impulsion arrive à l'entrée de la ligne, on peut considérer que l'impédance de charge du générateur est Z_c (fig. 3). De 0 à $2T$, instant où l'impulsion réfléchie sur la charge (à l'instant T) reviendra sur le

générateur, tout se passe comme si ce dernier était fermé sur une ligne infiniment longue dont l'impédance en tous points peut être considérée, nous l'avons vu, comme égale à Z_c.

À l'instant $t = 0$, nous avons donc, à l'entrée de la ligne, une impulsion de tension d'amplitude :

$$V_e = E \frac{Z_c}{Z_c + Z_G} \qquad (1)$$

Puisque nous étudions le cas où $Z_c = Z_G$, $V_e = E/2$. Cette impulsion va se réfléchir sur la charge à l'instant $T = \ell/v$ et retourne vers le générateur, qu'elle atteint à l'instant $2T$, avec une amplitude $\Gamma_R E/2$. Elle ne peut se réfléchir à l'entrée de la ligne puisque $\Gamma_G = 0$.

En branchant un oscilloscope aux bornes d'entrée de la ligne, nous observerons l'impulsion aller ($t = 0$) d'amplitude $E/2$ et l'impulsion retour ($t = 2T$) d'amplitude $\Gamma_R E/2$, de polarité positive ou négative selon que Γ_R est positif ou négatif (fig. 4).

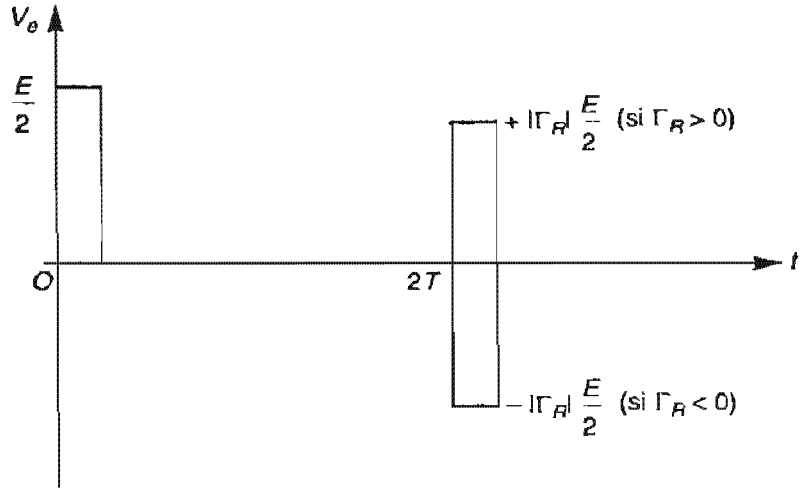


Figure 4. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée de la ligne dans le cas où le générateur est adapté.

Les cas particuliers intéressants sont ceux où :

a) $Z_R = \infty$ Alors, $\Gamma_R = +1$. L'impulsion réfléchie est positive, de même amplitude que l'impulsion incidente.

b) $Z_R = 0$ Alors, $\Gamma_R = -1$. L'impulsion réfléchie est négative, de même amplitude que l'impulsion incidente.

c) $Z_R = Z_c$ Alors, $\Gamma_R = 0$. Il n'y a pas d'impulsion réfléchie.

Remarque

Lorsque l'on a une ligne avec pertes, les impulsions réfléchies dans les cas a) et b) ont une amplitude V_r plus petite que celle V_i de l'impulsion incidente. Cela permet de déterminer les pertes de la ligne d'après : $\alpha(dB) = 20 \log (V_i/V_r)$ ou $\alpha(Np) = \ln (V_i/V_r)$.

7.2.2 Générateur désadapté – Z_R réelle

Dans ce cas une impulsion se propageant sur la ligne pourra être réfléchie tant au niveau de la charge : $\left(\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \neq 0\right)$

que du générateur : $\left(\Gamma_R = \frac{Z_G - Z_c}{Z_G + Z_c} \neq 0\right)$

À l'instant $t = 0$, nous avons à l'entrée de la ligne une impulsion de tension d'amplitude :

$$V_e = E \frac{Z_c}{Z_c + Z_G} = E' \qquad (2)$$

E' est ici différent de $E/2$ puisque Z_G est différent de Z_c. Si $Z_G > Z_c$, $E' < E/2$ et si $Z_G < Z_c$, $E' > E/2$. Cette impulsion se réfléchit sur la charge à l'instant $t = T$ et revient à l'entrée de la ligne avec une amplitude $\Gamma_R E'$; à l'instant $t = 2T$, elle se réfléchit sur le générateur et repart vers la charge avec une amplitude $\Gamma_R \Gamma_G E'$; et ainsi de suite...

Il y a donc à l'entrée de la ligne une succession d'impulsions d'amplitudes E', $\Gamma_R \Gamma_G E'$, $\Gamma_R^2 \Gamma_G^2 E'$... respectivement aux instants 0, $2T$, $4T$... ; il y a de même au niveau de la charge une succession d'impulsions d'amplitudes $E' \Gamma_R$, $E' \Gamma_R^2 \Gamma_G$, $E' \Gamma_R^3 \Gamma_G^2$... respectivement aux instants T, $3T$, $5T$...

Comme $\Gamma_R \Gamma_G$ est inférieur à 1 en module, les variations de la tension V_e à l'entrée de la ligne représentent une succession d'impulsions d'amplitudes progressivement décroissantes, toutes positives ou alternativement positives et négatives selon que $\Gamma_R \Gamma_G$ est positif ou négatif (fig. 5 et 6).

Remarque

Dans le cas où l'on a une ligne avec pertes, la décroissance est plus rapide puisque le facteur multiplicatif qui permet de passer d'une impulsion à la suivante n'est plus $\Gamma_R \Gamma_G$ mais $\Gamma_R \Gamma_G e^{-2\alpha\ell}$.

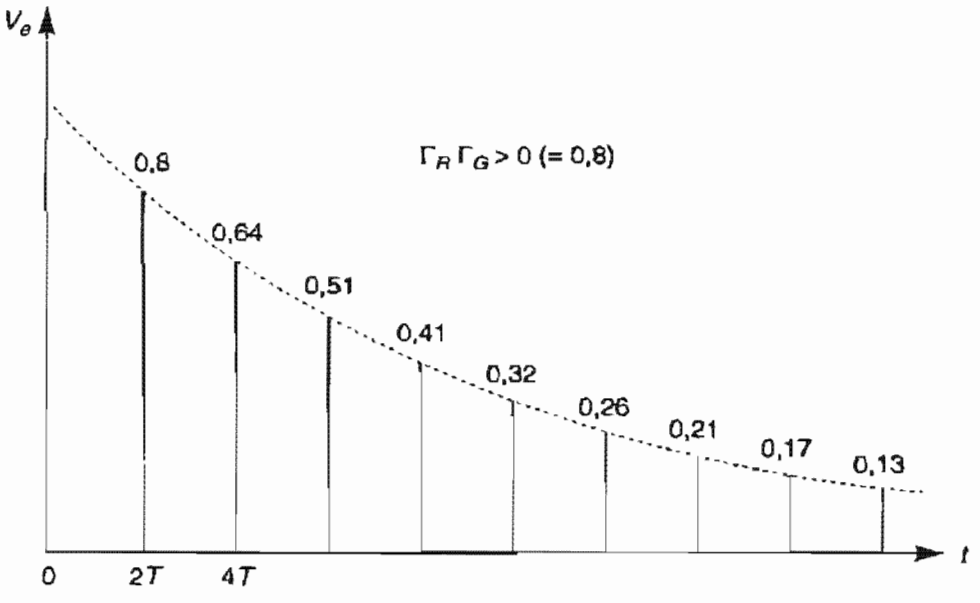


Figure 5. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée de la ligne dans le cas où le générateur est désadapté ($\Gamma_R \Gamma_G > 0$).

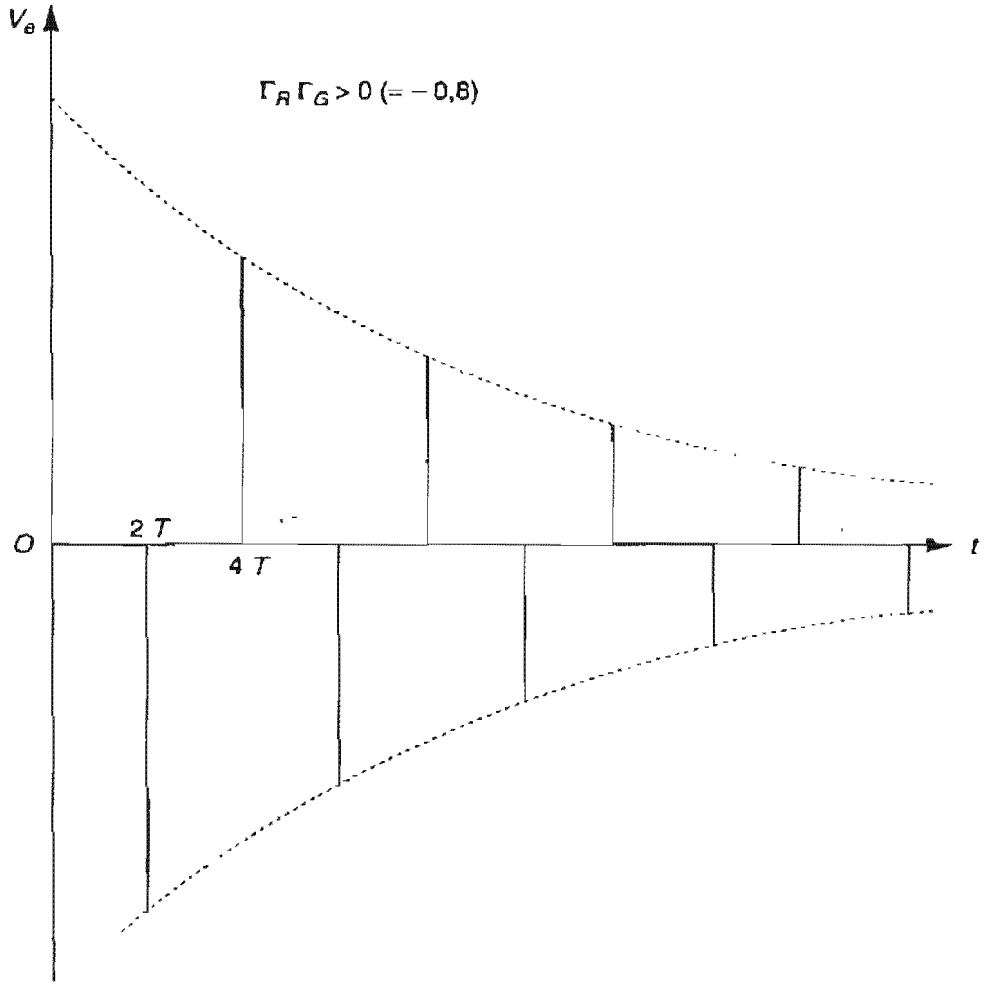


Figure 6.
Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée de la ligne dans le cas où le générateur est désadapté ($\Gamma_R \Gamma_G < 0$).

7.2.3 Phénomènes observables en pratique

La description qui vient d'être faite des variations de la tension à l'entrée de la ligne repose sur deux hypothèses :

a) Les impulsions utilisées sont infiniment courtes en durée.

b) La mesure de V_e se fait exactement à l'endroit où s'effectue la réflexion à la jonction ligne-générateur.

Or, ces deux conditions ne peuvent être exactement réalisées dans la pratique :

- on utilise des impulsions qui, si courtes soient-elles, ont une durée τ non négligeable ;
- la mesure de V_e se fera le plus souvent à une petite distance de la jonction ligne-générateur, côté ligne.

La conséquence en est qu'une partie de l'impulsion « incidente » (celle qui vient de la charge) et de l'impulsion « réfléchie » (celle qui repart vers la charge) peuvent se superposer.

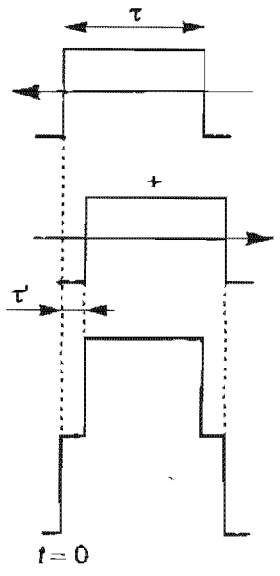


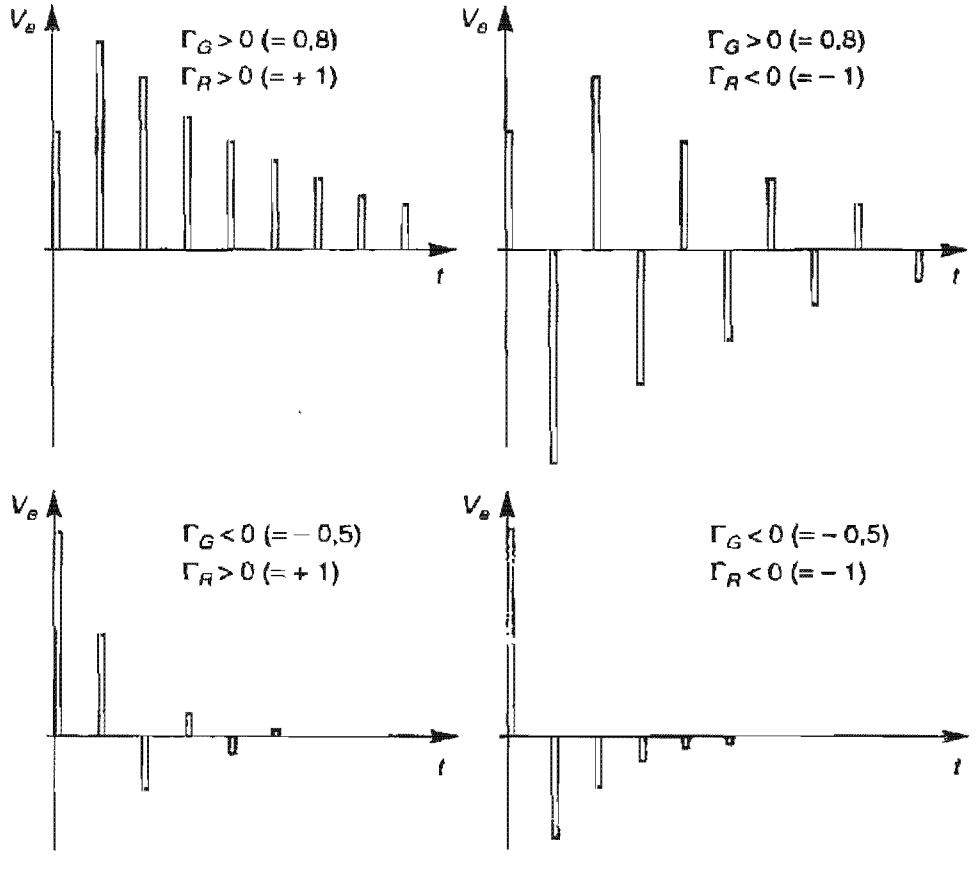
Figure 7. Décalage, au niveau du point de mesure, entre l'impulsion incidente et l'impulsion réfléchie sur le générateur.

Le schéma de la figure 7 montre, en effet, que l'impulsion « réfléchie » arrive au point de mesure alors que l'impulsion « incidente » n'est pas encore terminée. Il suffit, pour cela, que la durée τ de l'impulsion « incidente » soit supérieure au temps τ' que met le front avant de cette impulsion à effectuer l'aller-retour entre le point de mesure et le point où s'effectue la réflexion.

Dans ces conditions, nous observerons à l'oscilloscope :

- À $t = 0$, une impulsion « simple » d'amplitude E'.
- À $t = 2T$, une impulsion « double » d'amplitude $E' \Gamma_R (1 + \Gamma_G)$, résultant de la superposition de l'impulsion « incidente » d'amplitude $E' \Gamma_R$ et de l'impulsion « réfléchie » d'amplitude $E' \Gamma_R \Gamma_G$.
- À $t = 4T$ une impulsion « double » d'amplitude $E' \Gamma_R^2 \Gamma_G (1 + \Gamma_G)$; etc.

Or, si nous avons toujours, en module : $E' \Gamma_R (1 + \Gamma_G) > E' \Gamma_R^2 \Gamma_G (1 + \Gamma_G) > \ldots$ puisque l'on passe d'une impulsion à sa suivante en la multipliant par $\Gamma_R \Gamma_G$, nous n'avons pas forcément : $E' > E' \Gamma_R (1 + \Gamma_G)$ car $\Gamma_R (1 + \Gamma_G)$ peut être plus grand que 1, en module.



Figures 8 à 11. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée de la ligne dans différents cas : Γ_G et $\Gamma_R > 0$ (fig. 8), $\Gamma_G > 0$ et $\Gamma_R < 0$ (fig. 9), $\Gamma_G < 0$ et $\Gamma_R > 0$ (fig. 10), Γ_G et $\Gamma_R < 0$ (fig. 11).

Cela dépend des valeurs de Γ_R et de Γ_G. Il ne faudra donc pas s'étonner si la première impulsion observée est plus petite que la suivante. Les différents cas possibles sont représentés aux figures 8 à 11.

7.3 ÉTUDE EN RÉGIME D'ÉCHELON DE TENSION

Un échelon de tension peut être considéré comme une impulsion dont la durée est beaucoup plus grande que le temps de propagation aller-retour sur la ligne de longueur ℓ à laquelle elle est appliquée (fig. 12).

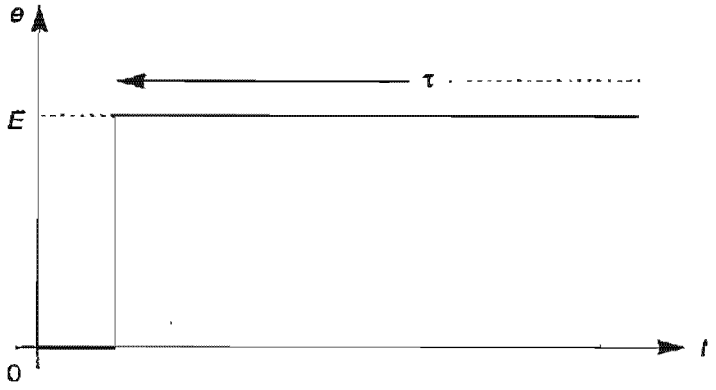


Figure 12. Échelon de tension, d'amplitude E.

C'est un signal particulièrement intéressant car la plupart des phénomènes impulsionnels peuvent se ramener à une superposition d'échelons de tension : c'est ainsi, par exemple, qu'une impulsion d'amplitude E peut être envisagée comme la superposition de deux échelons de tension décalés de τ dans le temps, le premier d'amplitude $+E$, le second d'amplitude $-E$.

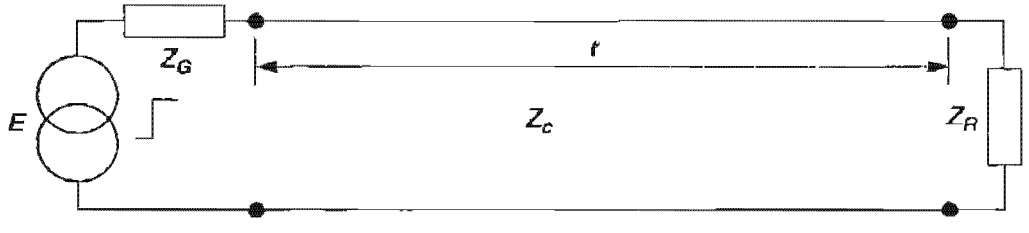


Figure 13. Générateur d'échelons de tension, ligne de longueur ℓ et impédance de charge.

Considérons, comme au paragraphe 7.2 « Étude en régime d'impulsion de tension », une ligne d'impédance caractéristique Z_c de longueur ℓ, terminée par une charge d'impédance Z_R (fig. 13). Nous supposons, cette fois-ci, qu'un générateur de signaux, de force électromotrice E, envoie à cette ligne un échelon de tension. Nous allons étudier trois cas fondamentaux.

7.3.1 Générateur adapté à la ligne – Z_R réelle

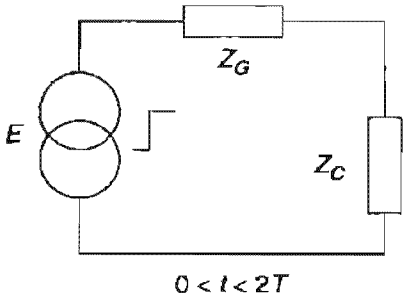


Figure 14. Réseau équivalent pour $0 < t < 2T$.

Soit $t = 0$, l'instant où l'échelon de tension est appliqué à l'entrée de la ligne. Durant l'intervalle de temps $2T$ que le front de l'échelon de tension mettra à aller sur la charge, s'y réfléchir et revenir à l'entrée de la ligne, tout se passe comme si le générateur avait entre ses bornes une impédance Z_c (fig. 14). La tension à l'entrée de la ligne sera donc égale à :

$$V_e = E\frac{Z_c}{Z_c + Z_G} = \frac{E}{2} \tag{3}$$

C'est, par conséquent, un front d'onde d'amplitude $E/2$ qui se propage vers la charge où il se réfléchit à l'instant $t = T$ (fig. 15). Alors prend naissance une onde réfléchie d'amplitude $\Gamma_R\, E/2$ tandis qu'il existe toujours une onde incidente d'amplitude $E/2$.

- Si $\Gamma_R > 0$, les amplitudes des deux ondes se superposeront ; l'amplitude résultante sera : $(1 + |\Gamma_R|)\, E/2$ (fig. 16).
- Si $\Gamma_R < 0$, les amplitudes des deux ondes se retrancheront ; l'amplitude résultante sera : $(1 - |\Gamma_R|)\, E/2$ (fig. 16).

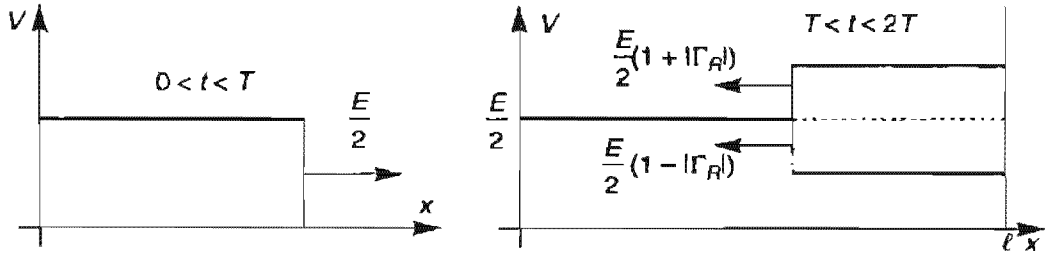


Figure 15. Propagation de l'échelon de tension sur la ligne pour $0 < t < T$.

Figure 16. Propagation de l'échelon de tension sur la ligne pour $T < t < 2T$.

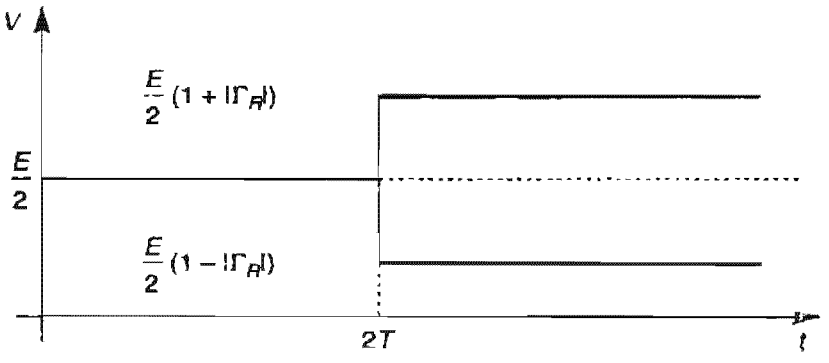


Figure 17. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée de la ligne dans le cas où le générateur est adapté.

Arrivée à l'entrée de la ligne, l'onde réfléchie ne pourra pas, à son tour, se réfléchir puisque $\Gamma_G = 0$. À partir de l'instant $2T$, la ligne sera donc chargée à la tension (fig. 17) :

$$\left(1 \pm |\Gamma_R|\right)\frac{E}{2} \tag{4}$$

Les cas particuliers intéressants sont ceux où :

a) $Z_R = \infty$ Alors $\Gamma_R = 1$: l'onde réfléchie double la charge prise sur la ligne.

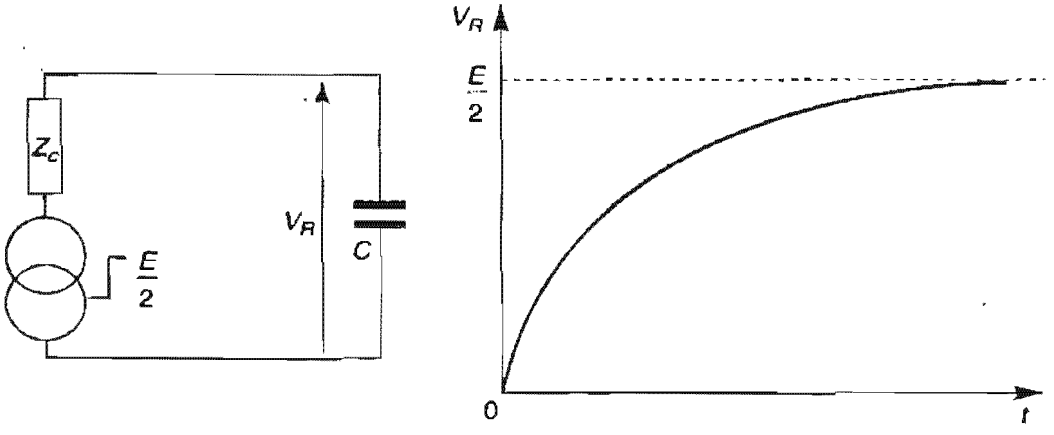
b) $Z_R = 0$ Alors $\Gamma_R = -1$: l'onde réfléchie annule la charge prise par la ligne.

c) $Z_R = Z_c$ Alors $\Gamma_R = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie. La ligne est tout entière chargée à la valeur $E/2$ dès que $t = T$.

7.3.2 Générateur adapté à la ligne – Z_R imaginaire pure

L'originalité de ce cas, par rapport au précédent, tient à ce que Γ_R est fonction du temps ; il faudra donc se demander quel est le régime transitoire sur l'impédance de charge.

a) Charge capacitive : $Z_R = 1/jC\omega$



Figures 18 et 19. Réseau équivalent et variation de la tension en fonction du temps aux bornes d'une charge capacitive soumise à un échelon de tension.

Lorsqu'au bout de $t = T$, l'échelon de tension d'amplitude $E/2$ arrive sur C, tout se passe comme si, à cet instant précis, on constituait en bout de ligne le circuit de la figure 18. Le condensateur va donc se charger exponentiellement à la valeur $E/2$ avec une constante de temps $\tau = C Z_c$ (fig. 19).

À l'extrémité de la ligne, il y a, à $t = T$, un courant instantané de charge, de valeur $I_R = E/2\ Z_c$ et, comme la charge commence juste, $V_R = 0$. Donc : $\Gamma_R (T) = -1$. Tout se passe comme s'il y avait un court-circuit en bout de ligne. En fin de charge, $I_R = 0$ et $V_R = E/2$ donc $Z_R = \infty$: le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Alors $\Gamma_R = 1$. Dans le régime transitoire, le coefficient de réflexion passe donc de -1 à $+1$ au fur et à mesure que la charge s'effectue.

À l'entrée de la ligne, entre 0 et $2T$, la tension est $E/2$ (fig. 20).

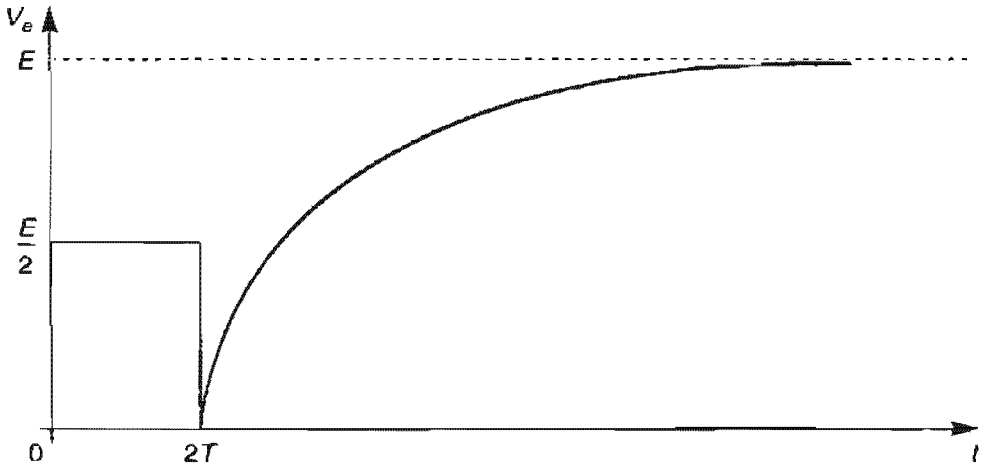
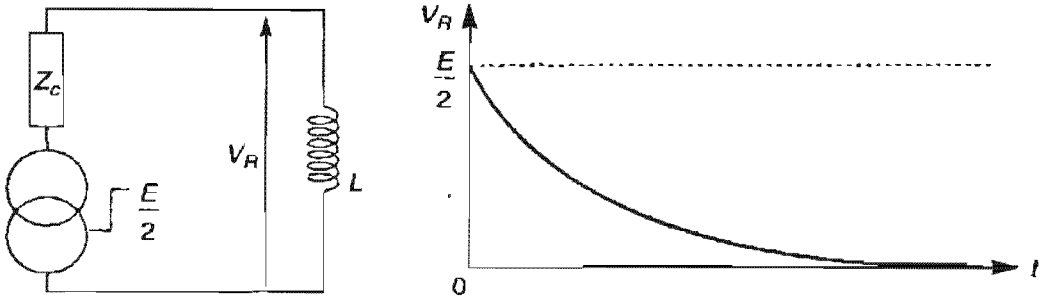


Figure 20. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée d'une ligne pour un générateur adapté et une charge capacitive.

À l'instant $2T$, il arrive une onde d'amplitude $-E/2$, ce qui fait que la tension s'annule comme si la ligne était court-circuitée. Mais, au fur et à mesure que t augmente, Γ_R passe de -1 à $+1$ avec une constante de temps égale à celle du condensateur. Dans ces conditions, l'amplitude de l'onde réfléchie croît avec la même constante de temps de $-E/2$ à $+E/2$ donc V_e croît de 0 à $+E$.

b) Charge inductive : $Z_R = jL\omega$



Figures 21 et 22. Réseau équivalent et variation de la tension en fonction du temps aux bornes d'une charge capacitive soumise à un échelon de tension.

Lorsqu'au bout de $t = T$, l'échelon de tension d'amplitude $E/2$ arrive sur L, tout se passe comme si, à cet instant précis, on constituait en bout de ligne le circuit (fig. 21). Il va donc apparaître aux bornes de L une force électromotrice d'induction propre qui va s'opposer à l'établissement d'un courant dans L. Pour $t = T$, elle a pour valeur $E/2$ et elle va décroître ensuite exponentiellement pour s'annuler avec la constante de temps $\tau = L/Z_c$ (fig. 22).

À l'extrémité de la ligne, nous avons pour $t = T$: $I_R = 0$, $V_R = E/2$ d'où $Z_R = \infty$. Tout se passe comme si l'on avait une ligne ouverte. Donc : $\Gamma_R(T) = +1$. En fin de charge, au contraire, $V_R = 0$, donc $Z_R = 0$ et $\Gamma_R = -1$. Tout se passe comme si l'on avait une ligne court-circuitée. Dans le régime transitoire, le coefficient de réflexion passe donc de $+1$ à -1.

À l'entrée de la ligne, la tension est égale à $E/2$ entre 0 et $2T$ (fig. 23). À l'instant $2T$ arrive une onde d'amplitude $E/2$: la tension double comme si la ligne était ouverte. Mais, au fur et à mesure que t augmente, Γ_R passe de $+1$ à -1

avec une constante de temps égale à celle de l'inductance. Alors l'amplitude réfléchie diminue de $E/2$ à $-E/2$ et la tension à l'entrée de la ligne décroît de E à 0.

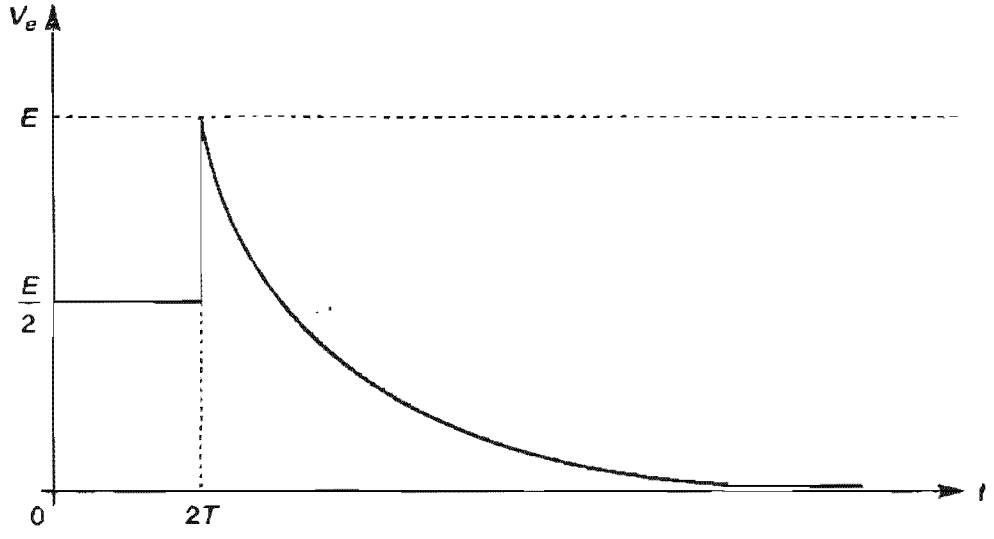


Figure 23. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée d'une ligne pour un générateur adapté et une charge inductive.

7.3.3 Générateur désadapté – Z_R réelle

À partir de l'instant (soit $t = 0$), où l'échelon de tension est appliqué à la ligne, nous avons vu qu'une onde incidente initiale d'amplitude $E' = E\,Z_c/(Z_c + Z_G)$ se propageait du générateur vers la charge. La charge ayant un coefficient de réflexion Γ_R, il y prend naissance, à $t = T$, une onde réfléchie d'amplitude $\Gamma_R E'$ qui se propage vers le générateur. En arrivant sur le générateur, à $t = 2T$, cette onde donne à son tour naissance à une seconde onde incidente d'amplitude $\Gamma_R \Gamma_G E'$ et ainsi de suite.

La différence entre ce régime et celui d'impulsions de tension est que nous nous intéressons ici à la propagation d'ondes qui se superposent les unes aux autres alors que nous avions à faire précédemment à des impulsions qui étaient bien séparées les unes des autres. Pour faire une étude mathématique du phénomène, appelons en les affectant d'un numéro d'ordre :

- OI, les ondes qui se déplacent vers la charge,
- OR, les ondes qui se déplacent vers l'entrée de la ligne.

$$OI_1 = E' \qquad OR_1 = \Gamma_R E'$$

$$OI_2 = \Gamma_R \Gamma_G E' \qquad OR_2 = \Gamma_R^2 \Gamma_G E'$$

$$OI_3 = (\Gamma_R \Gamma_G)^2 E' \qquad OR_3 = \Gamma_R^3 \Gamma_G^2 E'$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$OI_n = (\Gamma_R \Gamma_G)^{n-1} E' \qquad OR_n = \Gamma_R^n \Gamma_G^{n-1} E'$$

Faisons la somme de toutes ces ondes :

$$OI_1 + OR_1 = E'(1 + \Gamma_R)$$
$$OI_2 + OR_2 = E'(1 + \Gamma_R)\Gamma_R\Gamma_G$$
$$OI_3 + OR_3 = E'(1 + \Gamma_R)(\Gamma_R\Gamma_G)^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$OI_n + OR_n = E'(1 + \Gamma_R)(\Gamma_R\Gamma_G)^{n-1}$$

$$S = E'(1 + \Gamma_R)\sum_{i=0}^{n-1}(\Gamma_R\Gamma_G)^i$$

C'est une série géométrique de raison $q = \Gamma_R\,\Gamma_G$ et de terme général $a = E'(1 + \Gamma_R)$ dont la somme lorsque $n \to \infty$ est :

$$S = \frac{a}{1-q} = E'\frac{1+\Gamma_R}{1-\Gamma_R\Gamma_G} \tag{5}$$

Or : $$E' = E\frac{Z_c}{Z_c + Z_G}, \quad \Gamma_R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \quad \text{et} \quad \Gamma_G = \frac{Z_G - Z_c}{Z_G + Z_c}$$

Nous trouvons :

$$S = E\frac{Z_R}{Z_R + Z_G} \tag{6}$$

Tout se passe donc, en fin de compte, comme si le générateur était directement fermé sur Z_R. Physiquement, cela correspond au fait que lorsque $t \to \infty$ les réflexions aux extrémités de la ligne deviennent négligeables ; le régime transitoire est alors terminé et l'on se trouve en régime permanent continu pour lequel la ligne étudiée sert tout simplement à connecter le générateur à l'impédance Z_R.

En principe, le régime transitoire dure un temps infiniment long puisque, tous les $2T$, il y a un accroissement de tension supplémentaire. En fait, le régime permanent s'établit assez vite sur la ligne car, d'une part les accroissements sont de plus en plus faibles, d'autre part les intervalles de temps $2T$ sont très courts (de l'ordre de 1 µs pour une ligne de 100 m).

Avec un oscilloscope, nous observerions aux instants $2T$, $4T$, $6T$... les variations de la tension à l'entrée de la ligne résultant de la superposition à la tension déjà existante d'une onde de tension venant de la charge et de l'onde réfléchie à l'entrée de la ligne à laquelle elle donne naissance. Nous aurons ainsi successivement (fig. 24) :

- de 0 à $2T - \varepsilon$: E'
- de $2T$ à $4T - \varepsilon$: $E' + \Gamma_R E' + \Gamma_R\Gamma_G E' = E' + \Gamma_R(1 + \Gamma_G)E'$
- de $4T$ à $6T - \varepsilon$: $E' + \Gamma_R(1 + \Gamma_G)E' + \Gamma_R^2\Gamma_G E' + \Gamma_R^2\Gamma_G^2 E'$
 $= E' + \Gamma_R(1 + \Gamma_G)E' + \Gamma_R^2\Gamma_G\,(1 + \Gamma_G)E'$

$$= E' + \Gamma_R (1 + \Gamma_G) E' [1 + \Gamma_R \Gamma_G]$$

etc.

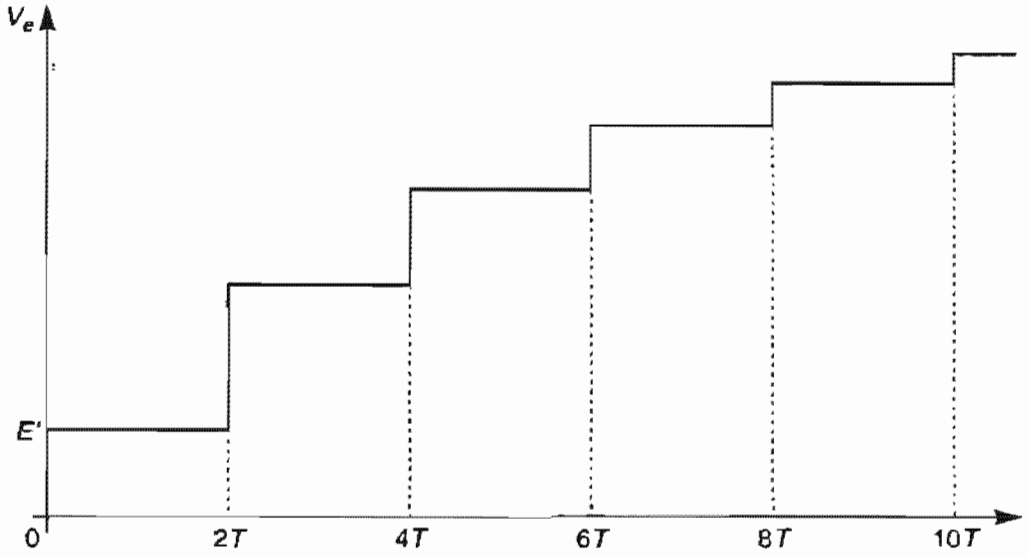


Figure 24. Phénomènes observables avec un oscilloscope à l'entrée d'une ligne pour un générateur désadapté dans le cas où Γ_G et $\Gamma_R > 0$.

La tension à la fin du régime transitoire est la somme de E' et de la série :

$$\Gamma_R (1 + \Gamma_G) E' [1 + \Gamma_R \Gamma_G + \Gamma_R^2 \Gamma_G^2 + ...]$$

dont le terme général est : $\Gamma_R (1 + \Gamma_G) E'$, et la raison : $\Gamma_R \Gamma_G$.

La tension à l'entrée de la ligne lorsque le régime permanent est établi est donc :

$$E' + E' \frac{\Gamma_R (1 + \Gamma_G)}{1 - \Gamma_R \Gamma_G} = E' \frac{1 - \Gamma_R \Gamma_G + \Gamma_R + \Gamma_R \Gamma_G}{1 - \Gamma_R \Gamma_G} = E' \frac{1 + \Gamma_R}{1 - \Gamma_R \Gamma_G} \qquad (7)$$

C'est bien là le résultat qui avait été trouvé, en sommant d'une façon différente à la formule (5).

D'autres « cas de figure » que celui représenté ci-dessus (qui correspond à Γ_R et $\Gamma_G > 0$) sont possibles selon que Γ_R et Γ_G sont tous deux < 0 ou l'un > 0 et l'autre < 0. Il est vivement conseillé au lecteur de tracer, pour chacun d'eux, les graphiques $V_e(t)$ à titre d'exercice.

Remarque

Tous les raisonnements de ce paragraphe ont été faits en supposant que l'on avait une ligne sans perte. Dans le cas d'une ligne avec pertes, ils restent qualitativement valables ; dans les relations écrites, on tiendra compte des pertes en ajoutant un facteur multiplicatif $e^{-\alpha \ell}$ chaque fois qu'une longueur de ligne ℓ a été parcourue par une des ondes considérées.

Chapitre 8

Lignes bifilaires et coaxiales

8.1 PARAMÈTRES PRIMAIRES

Nous avons expliqué au chapitre « Propagation sur une ligne en haute fréquence – Modélisation de la ligne », l'importance et le rôle des paramètres dits primaires R_l, L_l, G_l et C_l dans la modélisation d'une ligne. Pour les lignes T.E.M. comme les lignes bifilaires et coaxiales – où les notions de tension et de courant conservent un sens, car les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont transversaux – ces paramètres ont une signification physique et peuvent être déterminés par des formules analytiques simples.

La détermination de L_l et C_l peut être effectuée à partir des lois fondamentales de l'électromagnétisme dans l'approximation des états quasi-stationnaires ; en effet, pour les lignes T.E.M., la répartition du champ dans un plan transversal est la même que l'on soit en régime stationnaire ou en régime variable.

Pour ce qui est de R_l et G_l, on doit tenir compte des phénomènes liés aux hautes fréquences : pour R_l, il s'agit de la localisation superficielle des courants dans les conducteurs (effet de peau) et pour G_l des pertes de nature conductrice dans le diélectrique.

Divers ouvrages *[22, 24, 26, 32]* détaillent les méthodes de détermination de ces paramètres et l'exercice 8.1 traite le cas important de la ligne coaxiale.

8.1.1 La ligne coaxiale

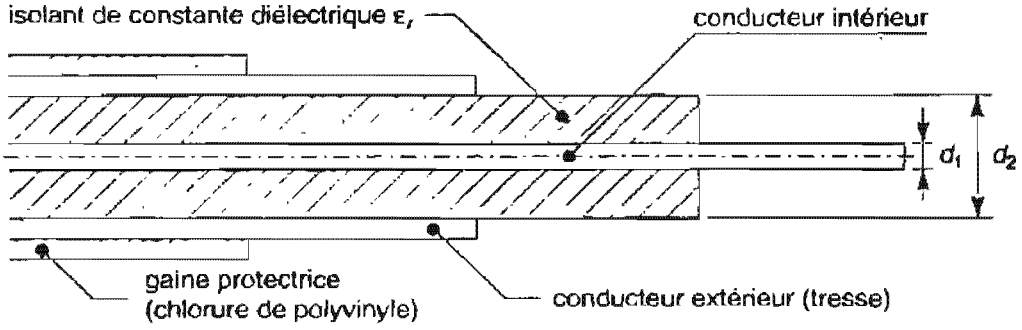


Figure 1. Ligne coaxiale : géométrie et éléments constitutifs.

Soient d_1 le diamètre du conducteur intérieur de conductivité σ_1, d_2 le diamètre intérieur du conducteur extérieur de conductivité σ_2, ε_r la constante diélectrique relative et tg δ le facteur de pertes du diélectrique.

Les valeurs par unité de longueur de la résistance, de l'inductance, de la conductance et de la capacité sont respectivement :

$$R_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi}}\left(\frac{1}{d_1\sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2\sqrt{\sigma_2}}\right)$$

$$= 0{,}632 \cdot 10^{-3}\sqrt{f}\left(\frac{1}{d_1\sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2\sqrt{\sigma_2}}\right) (\Omega/\text{m}) \qquad (1)$$

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1} = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ln\frac{d_2}{d_1}\ (\text{H/m}) \qquad (2)$$

$$G_1 = 4\pi^2\frac{\varepsilon f \operatorname{tg}\delta}{\ln\frac{d_2}{d_1}} = 0{,}349 \cdot 10^{-9}\frac{\varepsilon_r f \operatorname{tg}\delta}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\ (\text{S/m}) \qquad (3)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{d_2}{d_1}} = 0{,}055 \cdot 10^{-9}\frac{\varepsilon_r}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\ (\text{F/m}) \qquad (4)$$

8.1.2 La ligne bifiliaire

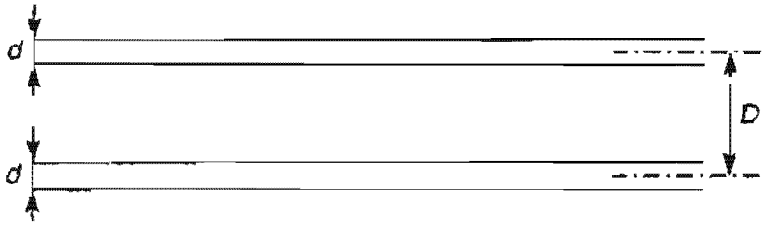


Figure 2. Ligne bifilaire : géométrie.

Soient d le diamètre des conducteurs de la ligne et D leur espacement d'axe à axe.

Les valeurs par unité de longueur de la résistance, de l'inductance, de la conductance et de la capacité sont respectivement :

$$R_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi\sigma}} \frac{1}{d\sqrt{1-\left(\frac{d}{D}\right)^2}} = 1{,}26 \cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{f}{\sigma}} \frac{1}{d\sqrt{1-\left(\frac{d}{D}\right)^2}} \ (\Omega/\text{m}) \quad (5)$$

$$L_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\frac{2D}{d} = 0{,}40 \cdot 10^{-6} \ln\frac{2D}{d} \ (\text{H/m}) \quad (6)$$

$$G_1 = 2\pi^2 \frac{\varepsilon f \ \text{tg}\,\delta}{\ln\frac{2D}{d}} = 0{,}175 \cdot 10^{-9} \frac{\varepsilon_r f \ \text{tg}\,\delta}{\ln\frac{2D}{d}} \ (\text{S/m}) \quad (7)$$

$$C_1 = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{2D}{d}} = 0{,}028 \cdot 10^{-9} \frac{\varepsilon_r}{\ln\frac{2D}{d}} \ (\text{F/m}) \quad (8)$$

8.2 PARAMÈTRES SECONDAIRES DE LA LIGNE COAXIALE

8.2.1 Affaiblissement

Nous nous plaçons dans le cas des lignes à faibles pertes qui est évidemment le seul intéressant en pratique. L'affaiblissement doit alors se calculer d'après la formule (5) du chapitre 6 « Lignes avec pertes » et l'on obtient :

$$\alpha\,(\text{Np/m}) = \sqrt{\varepsilon f \pi}\left(\frac{1}{d_1\sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2\sqrt{\sigma_2}}\right)\left(\frac{1}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\right) + \frac{\pi f \ \text{tg}\,\delta}{v} \quad (9)$$

Dans cette formule, il est facile de reconnaître que le premier terme représente les pertes α_c dans les conducteurs et que le second représente les pertes α_d dans le diélectrique. En explicitant numériquement ε et $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, nous obtenons :

$$\alpha_c\,(\text{dB/m}) = 45{,}8 \cdot 10^{-6}\sqrt{\varepsilon_r f}\left(\frac{1}{d_1\sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2\sqrt{\sigma_2}}\right)\left(\frac{1}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\right) \quad (10)$$

$$\alpha_d\,(\text{dB/m}) = 91 \cdot 10^{-9}\sqrt{\varepsilon_r}\, f \ \text{tg}\,\delta \quad (11)$$

8.2.2 Paramètre de phase

Pour le paramètre de phase β, nous savons d'après la relation (4) du chapitre 6 « Lignes avec pertes » que : $\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1}$.

En tenant compte des relations (2) et (4), nous avons :

$$\beta = 2\pi \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon \mu_0} = 2\pi \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0} \qquad (12)$$

Comme, par définition, $\beta = 2\pi/\lambda$, il en résulte que la longueur d'onde sur la ligne $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}$ est la même qu'en espace libre diélectrique.

D'autre part, la vitesse de phase :

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad (13)$$

est aussi la même qu'en espace libre.

Enfin, puisque v_p est indépendante de la fréquence, nous avons pour la vitesse de groupe : $v_g = d\omega/d\beta = \omega/\beta = v_p$.

La ligne coaxiale est donc exempte de distorsion de phase.

Toutes ces propriétés sont normales puisque le mode de propagation est un mode T.E.M., comme en espace libre.

8.2.3 Impédance caractéristique

En se plaçant toujours dans l'hypothèse des lignes à faibles pertes, l'impédance caractéristique est donnée par la formule (7) du chapitre « Lignes avec pertes ». En VHF et aux fréquences supérieures, il est possible de négliger les termes en $R_1/2L_1\omega$ et $G_1/2C_1\omega$ (voir exercice 8.3) d'où : $Z_c = \sqrt{L_1/C_1}$

et

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon_r}} \log \frac{d_2}{d_1} \ (\Omega) \qquad (14)$$

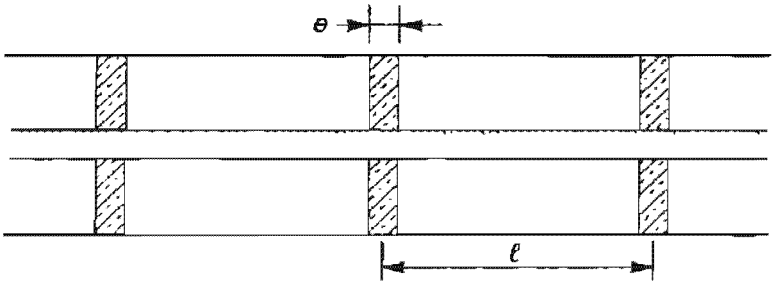


Figure 3. Ligne bifilaire à isolant semi-aéré.

Afin de réduire les pertes, on a intérêt à utiliser l'air comme diélectrique, d'où l'emploi d'isolants dits semi-aérés (notamment dans les lignes rigides) où le centrage des conducteurs est obtenu au moyen de disques de permittivité ε_r et d'épaisseur e espacés d'une périodicité ℓ (fig. 3) ; alors :

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{1 + (\varepsilon_r - 1)\frac{e}{\ell}}} \ln \frac{d_2}{d_1} \qquad (15)$$

8.3 DIMENSION OPTIMALE D'UNE LIGNE COAXIALE

Pour rendre les pertes minimales, on a évidemment intérêt à utiliser un diélectrique et des conducteurs de très bonne qualité. Ceci étant, nous constatons d'après la relation (9) que α dépend de la fréquence et des dimensions du coaxial. À une fréquence donnée, seul le terme α_c représentant les pertes dans les conducteurs, dépend des dimensions du coaxial :

$$\alpha_c = K\left(\frac{1}{d_1\sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2\sqrt{\sigma_2}}\right)\left(\frac{1}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\right)$$

Dans le cas particulier, important en pratique, où $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, nous avons :

$$\alpha_c = K\frac{1}{d_2\sqrt{\sigma}}\left(\frac{d_2}{d_1} + 1\right)\left(\frac{1}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\right)$$

Si d_2 est fixé, nous voyons que le minimum de α_c, donc de α, correspond au minimum de la fonction : $(1 + x)/\ln x$ avec $x = d_2/d_1$.

Sa dérivée s'annule pour $\ln x = 1 + 1/x$ soit pour $x = 3{,}59$.

Pour qu'une ligne coaxiale présente des pertes minimales, il faut donc que $d_2/d_1 = 3{,}59$. D'après (14), la valeur correspondante de l'impédance caractéristique est : $Z_c = 76{,}7/\sqrt{\varepsilon_r}$

Il est intéressant de noter qu'au voisinage du minimum, α_c varie relativement peu en fonction de d_2/d_1 (fig. 4). Ceci laisse donc une marge pour choisir d_2/d_1 afin que la valeur correspondante de Z_c soit adaptée au problème à traiter ou à la normalisation établie.

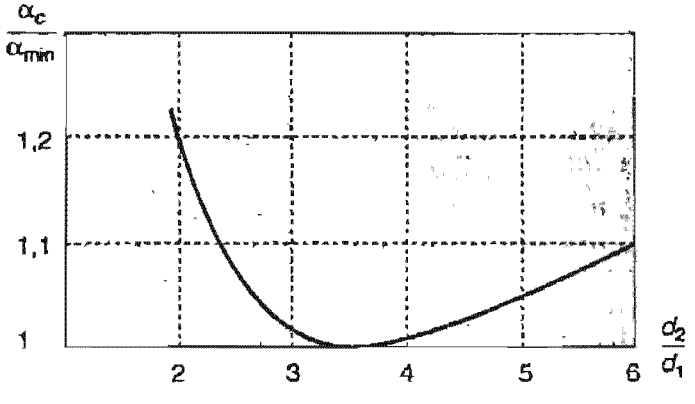


Figure 4. Variation de l'affaiblissement relatif d'une ligne coaxiale en fonction du rapport d_2/d_1.

Exemples

1. Avec du téflon dont $\varepsilon_r = 2$, $Z_c = 50\ \Omega$, si :

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{50\sqrt{2}}{60} = 1{,}178 \Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = 3{,}25$$

2. Avec du polyéthylène dont $\varepsilon_r = 2{,}25$, $Z_c = 50\ \Omega$ si :

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{50 \cdot 1{,}5}{60} = 1{,}25 \Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = 3{,}5$$

3. Avec du polyéthylène dont $\varepsilon_r = 2{,}25$, $Z_c = 75\ \Omega$ si :

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{7{,}5 \cdot 1{,}5}{60} = 1{,}875 \Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = 6{,}52$$

8.4 PUISSANCE TRANSPORTABLE PAR UNE LIGNE COAXIALE

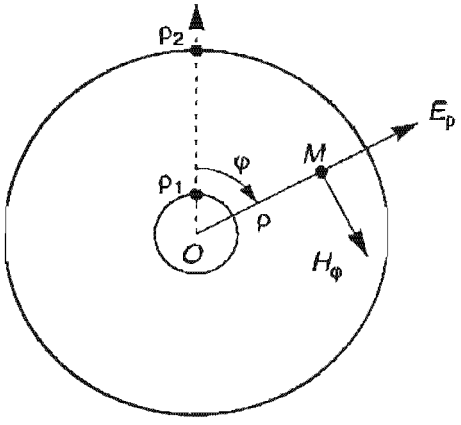


Figure 5. Champs E et H en un point M du diélectrique d'une ligne coaxiale. $OM = \rho$; ρ_1 et ρ_2 sont les rayons des conducteurs intérieur et extérieur.

Soit un point $M(\rho, \phi)$ de la section droite d'un coaxial dont la distance radiale à l'axe est $OM = \rho$. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en ce point sont définis respectivement par leurs composantes radiale et tangentielle (fig. 5).

$$\underline{E}_\rho = -j\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{A}{\rho} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z} \qquad (16)$$

$$\underline{H}_\varphi = \underline{E}_\rho \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \qquad (17)$$

A est une constante qu'il est judicieux de déterminer en fonction de la valeur du champ électrique E_1 à la surface du conducteur intérieur puisque c'est à cet endroit que le champ électrique est le plus élevé.

Nous avons, en module : $E_1 = (2\pi/\lambda) \cdot (A/\rho_1)$

d'où :

$$\underline{E}_\rho = -j E_1 \frac{\rho_1}{\rho} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z} \qquad (18)$$

D'après le vecteur de Poynting : $\vec{P} = (1/2)\,\vec{E} \wedge \vec{H}^*$, la densité de puissance transportée n'a qu'une composante, parallèle à l'axe du coaxial, qui a pour expression en M :

$$P_z = \frac{1}{2}\underline{E}_\rho \underline{H}^*_\varphi = \frac{1}{2} E_\rho^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{2} E_\rho^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120\pi}$$

d'où :

$$P_z = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{240\pi} E_1^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 \tag{19}$$

La puissance moyenne active transportée par le coaxial est donnée par le flux de P_z à travers la section droite :

$$P = \iint_S P_z \, dS = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{240\pi} E_1^2 \rho_1^2 \iint_S \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\rho^2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{240\pi} E_1^2 \rho_1^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

d'où :

$$P = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120} E_1^2 \rho_1^2 \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \tag{20}$$

En appelant E_0 la rigidité du diélectrique utilisé, nous obtenons l'expression de la puissance maximale transportable par le coaxial :

$$P_{max} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120} E_0^2 \rho_1^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{21}$$

Nous voyons que cette puissance dépend des dimensions du coaxial. Pour un coaxial de diamètre extérieur d_2 donné, nous voyons que P_{max} dépend de la fonction $(1/x^2) \ln x$ avec $x = d_2/d_1$. Cette fonction passe par un maximum pour $x = \sqrt{e} = 1{,}65$.

8.5 PARAMÈTRES SECONDAIRES DE LA LIGNE BIFILAIRE

8.5.1 L'affaiblissement

Dans l'hypothèse des lignes à faibles pertes, nous savons que l'affaiblissement doit se calculer d'après la formule (5) du chapitre 6 « Lignes avec pertes ». Compte tenu des valeurs des paramètres primaires donnés au paragraphe 8.1.2, nous obtenons :

$$\alpha\,(\text{Np/m}) = \sqrt{\frac{\pi \varepsilon f}{\sigma}} \frac{\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{d \ln\frac{2D}{d}} + \frac{\pi f \operatorname{tg}\delta}{v} \tag{22}$$

Comme pour la ligne coaxiale, le premier terme représente les pertes α_c dans les conducteurs et le second les pertes α_d dans le diélectrique. En explicitant numériquement ε et $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, il vient :

$$\alpha_c\,(\text{dB/m}) = 45{,}8 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{\varepsilon_r f}{\sigma}} \cdot \frac{\left|1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right|^{-\frac{1}{2}}}{d \ln \frac{2D}{d}} \qquad (23)$$

$$\alpha_d\,(\text{dB/m}) = 91 \cdot 10^{-9} \sqrt{\varepsilon_r}\, f \operatorname{tg} \delta \qquad (24)$$

L'affaiblissement le plus important est celui dû aux conducteurs. Nous voyons que, pour un diélectrique et des conducteurs donnés, il dépend en première approximation des dimensions par la fonction $1/d \ln (2D/d)$. Pour un écartement des fils D = cte, cette fonction passe par un minimum pour $2D/d = 2{,}72$. En pratique, cette condition n'est pas respectée car cela obligerait à prendre des fils de diamètre trop important (d'où augmentation du poids et du coût). Heureusement, la variation de α_c avec le diamètre des fils est très lente puisque la valeur du minimum est seulement multipliée par deux pour $2D = 10d$.

8.5.2 Le paramètre de phase

Pour le *paramètre de phase* β, nous trouvons comme pour la ligne coaxiale : $\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ d'où les mêmes conclusions concernant λ, v_p et v_g.

8.5.3 L'impédance caractéristique

Elle pourra être calculée, dans les mêmes conditions que pour la ligne coaxiale, d'après :

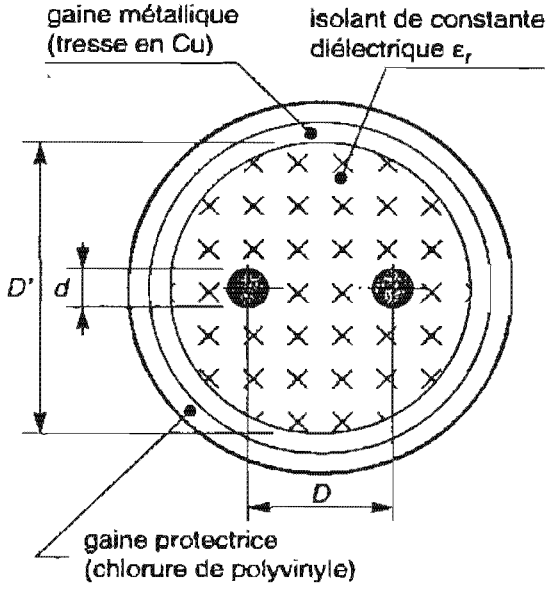
$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi\varepsilon} \ln^2 \frac{2D}{d}} = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{2D}{d} = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon_r}} \log \frac{2D}{d} \qquad (25)$$

S'il s'agit d'une ligne bifilaire sous écran (fig. 6), l'impédance caractéristique est donnée par :

$$Z_c = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon_r}} \log \left| \frac{2D}{d} \cdot \frac{1 - \left(\frac{D}{D'}\right)^2}{1 + \left(\frac{D}{D'}\right)^2} \right| \qquad (26)$$

Enfin, pour une ligne bifilaire à diélectrique air dont l'écartement entre les deux conducteurs en cuivre est maintenu constant au moyen d'entretoises isolantes de permittivité ε_r, d'épaisseur e et d'espacement ℓ (fig. 7) :

$$Z_c = \frac{276}{\sqrt{1 + (\varepsilon_r - 1)\frac{e}{\ell}}} \log \frac{2D}{d} \qquad (27)$$



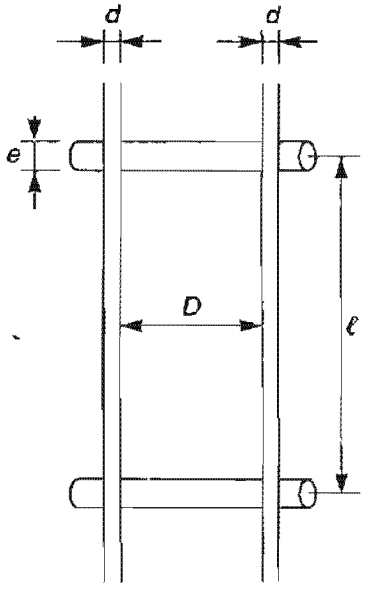


Figure 6.
Ligne bifilaire sous écran en coupe transversale : géométrie et éléments constitutifs

Figure 7.
Ligne bifilaire avec entretoises isolantes.

8.6 PARAMÈTRES SECONDAIRES DES LIGNES UTILISÉES EN BASSE FRÉQUENCE

Les paramètres secondaires déterminés au paragraphe 8.2 pour la ligne coaxiale et au paragraphe 8.5 pour la ligne bifilaire l'ont été dans l'approximation des hautes fréquences qui suppose que $R_l \ll L_l\omega$ et $G_l \ll C_l\omega$. Pour les lignes coaxiales, cette approximation est, en général, valable car elles ne sont pas utilisées en télécommunications à des fréquences inférieures à 100 KHz. Les lignes bifilaires, en revanche, sont utilisées aussi bien pour acheminer des signaux multiplex HF (comprenant de 12 à 120 voies téléphoniques) que pour les liaisons entre centraux et abonnés où elles fonctionnent alors aux fréquences vocales, c'est-à-dire à des basses fréquences comprises entre 0 et 4 KHz. À ces fréquences, alors que la condition $G_l \ll C_l\omega$ est toujours satisfaite, la condition $R_l \ll L_l\omega$ ne l'est plus et l'on a, au contraire, $R_l \gg L_l\omega$ (à moins que $L_l\omega$ ne soit relevé artificiellement par le procédé de pupinisation, expliqué au chapitre 6).

De plus, en BF, l'inductance L_l est fonction de la fréquence ; elle est, en effet, la somme :

- d'une inductance externe L_e, due aux lignes de force du champ magnétique qui ne pénètrent pas dans les conducteurs. L_e est indépendante de la fréquence et se calcule par les formules (2) ou (6) ;

- d'une inductance interne L_i, due aux lignes de force qui se ferment dans les conducteurs. L_i dépend de la fréquence ; elle vaut 0,1 mH/km aux fréquences vocales, elle décroît quand la fréquence augmente à cause de l'effet de peau et tend vers zéro aux hautes fréquences.

Voyons maintenant quelles formules doivent être utilisées en BF pour le calcul des paramètres secondaires des lignes, compte tenu de ce que : $R_l \gg L_l \omega$ et $G_l \equiv 0$.

$$\gamma = \sqrt{(R_l + j L_l \omega)(G_l + j C_l \omega)} \cong \sqrt{j R_l C_l \omega} = \sqrt{R_l C_l \omega}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$$

D'où : $$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{R_l C_l \omega}{2}} \quad \textbf{(28)}$$

et : $$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{R_l C_l}} \quad \textbf{(29)}$$

L'affaiblissement et la vitesse de propagation augmentent comme la racine carrée de la fréquence ; il y a donc de la distorsion d'amplitude et de phase.

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_l + j L_l \omega}{G_l + j C_l \omega}} \cong \sqrt{\frac{R_l}{j C_l \omega}} = \sqrt{\frac{R_l}{C_l \omega}}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \textbf{(30)}$$

Le module de Z_c varie donc en raison inverse de $\sqrt{f}$.

8.7 EXEMPLES DE LIGNES UTILISÉES EN TÉLÉCOMMUNICATIONS

8.7.1 Câbles téléphoniques pour fréquences vocales

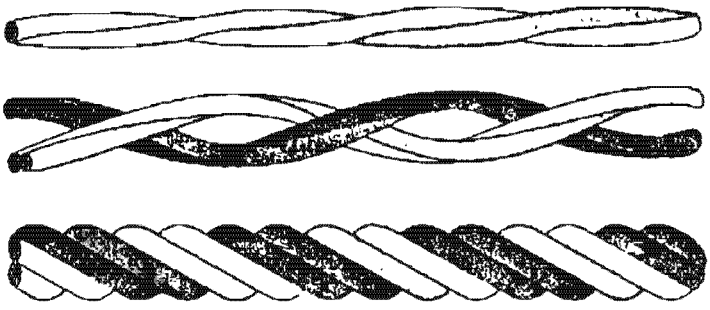


Figure 8.
a. Ligne bifilaire appelée « paire ».
b. Quarte constituée par deux lignes bifilaires.
c. Quarte dite « en étoile ».

Ces câbles sont constitués de plusieurs lignes bifilaires ou « paires », en général groupées par deux pour former une quarte (fig. 8). Ils servent à relier les abonnés aux centraux téléphoniques.

Les conducteurs sont isolés par du papier sec ou du plastique ($\varepsilon_r \equiv 2$) ; la distance entre axes des conducteurs est d'environ 1,5 fois leur diamètre ($2D/d = 3$) ; dans l'exemple qui suit $d = 0{,}4$ mm.

a) Paramètres primaires (fig. 9, d'après *[33 p. 223-224]*)

- La résistance R_l a la même valeur en BF qu'en courant continu, soit de l'ordre de 100 Ω/km. À partir de 100 KHz, elle augmente proportionnellement à $\sqrt{f}$ (relation (5)) sous l'influence de l'effet de peau.
- La conductance G_l peut être négligée $\forall f$.
- L'inductance L_l n'atteint sa valeur de 0,44 mH/km donnée par (6) qu'en HF ; lorsque la fréquence diminue, elle augmente pour atteindre une valeur de l'ordre de 0,6 mH/km aux BF ; cette augmentation est due à l'adjonction de l'inductance interne L_i dont nous avons parlé au paragraphe 8.6.
- Enfin, la capacité C_l est d'après (8) : 0,051 µF/km.

b) Paramètres secondaires

En BF, par exemple à 1 KHz, où $L_l\omega \equiv 4\ \Omega/\text{km} \ll R_l$ ces paramètres doivent se calculer à l'aide des formules (28), (29) et (30).

$$\rightarrow\ \alpha = \sqrt{\frac{R_l\, C_l\, \omega}{2}} = 0{,}1265\ \text{Np/km} \cong 1\ \text{dB/km}$$

$$\rightarrow\ v_p = \sqrt{\frac{2\omega}{R_l\, C_l}} = 4{,}962 \cdot 10^4\ \text{km/s}$$

$$\rightarrow\ Z_c = \sqrt{\frac{R_l}{C_l\, \omega}}\ e^{-j\frac{\pi}{4}} = 558\ \Omega \angle -45°$$

En HF, par exemple à 1 MHz, où $L_l\omega \equiv 3\,140\ \Omega \gg R_l$, ces paramètres doivent se calculer à l'aide des formules (23), (13) et (25).

$$\rightarrow\ \alpha = 45{,}8 \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\sigma}}\ \sqrt{f_{\text{MHz}}} \cdot \left[d \ln \frac{2D}{d}\right]^{-1}\ \text{dB/km}$$

En prenant $\varepsilon_r = 2$, $\sigma = 5{,}65 \cdot 10^7$, $d = 0{,}4$ mm et $2D/d = 3$: $\alpha = 26$ dB/km.

$$\rightarrow\ v_p = \frac{1}{\sqrt{L_l\, C_l}} = 198\,000\ \text{km/s}\ \ (\text{avec } L_l = 0{,}50\ \text{mH/km})$$

$$\rightarrow\ Z_c = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{2D}{d} = 93{,}2\ \Omega$$

Les figures 10, 11 et 12 d'après *[33 p. 224-225]* montrent respectivement les variations de Z_c, α et v_p dans la gamme de fréquences 1 KHz-10 MHz.

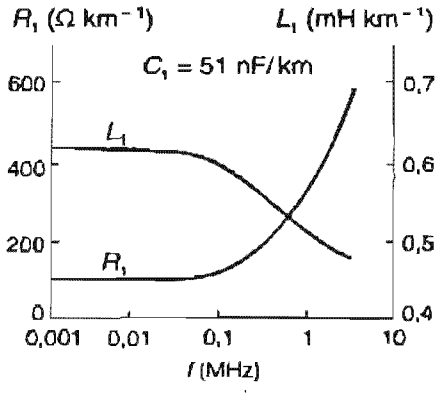


Figure 9. Variation fréquentielle des paramètres primaires R_l et L_l d'une ligne bifilaire utilisée en télécommunications

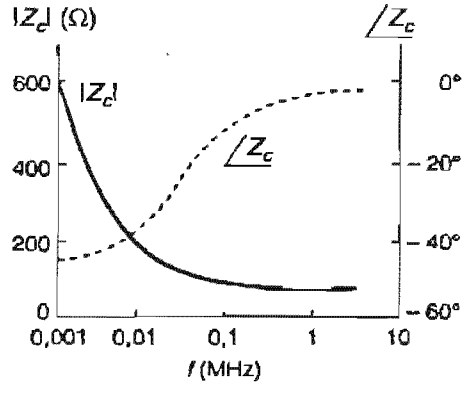
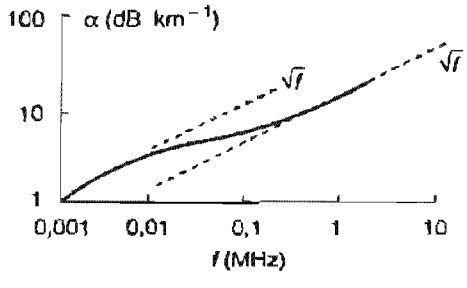
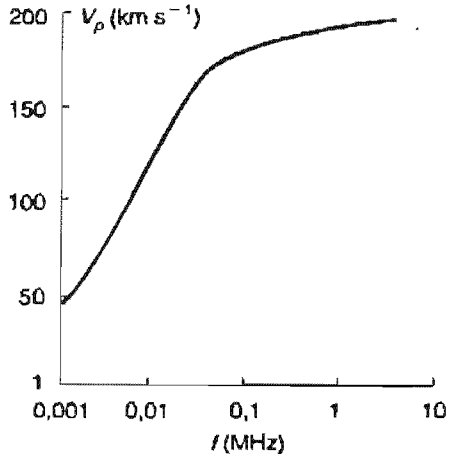


Figure 10. Variation fréquentielle de $|Z_c|$ et arg Z_c de la ligne bifilaire caractérisée à la figure 9.





Figures 11 et 12. Variation fréquentielle des paramètres α et v_p de la ligne bifilaire caractérisée à la figure 9.

Les figures 9 à 12 sont extraites du livre de K.F. Sander et G.A.L. Reed « Transmission and propagation of electromagnetic waves » (Chap. VI, p. 223 à 225). Éditeur Cambridge University Press (1978).

8.7.2 Câbles téléphoniques à circuits coaxiaux pour multiplex

Ces câbles sont constitués par le regroupement de plusieurs lignes coaxiales dont les diamètres des conducteurs intérieur et extérieur sont 2,6 et 9,5 mm dans les réalisations les plus courantes. Ils servent aux liaisons interurbaines entre centraux téléphoniques et permettent l'acheminement de 960 voies (Δf = 4 MHz), 2 700 voies (Δf = 12 MHz) ou 10 800 voies (Δf = 60 MHz). Il existe aussi des câbles du type 1,2/4,4 mm qui acheminent 300 voies (Δf = 1,3 MHz), 1 200 voies (Δf = 6 MHz) ou 2 700 voies (Δf = 12 MHz). Enfin les câbles 3,7/13,5 mm sont utilisés pour 10 800 voies (Δf = 60 MHz).

Nous allons nous intéresser aux câbles 2,6/9,5 mm dont le diélectrique est de l'air sauf pour des rondelles de polyéthylène régulièrement espacées qui assurent le centrage des conducteurs. La constante diélectrique relative équivalente est $\varepsilon_r = 1{,}09$.

a) Paramètres primaires

D'après (1), (2), (3) et (4), nous avons :

$\rightarrow$ $R_1 = 41\sqrt{f}\ \Omega/\text{km}$ (f en MHz)

$\rightarrow$ $L_1 = 0{,}26$ mH/km

$\rightarrow$ $G_1 \cong 0$ car, à 10 MHz, $\operatorname{tg}\delta = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ $\Rightarrow$ $G_1 < 10^{-3}$ S/km

$\rightarrow$ $C_1 = 0{,}046\ \mu\text{F/km}$

b) Paramètres secondaires

Ils se déterminent d'après (10), (13) et (14) :

$$\rightarrow\ \alpha = 19{,}9 \cdot 10^{-6}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{\sigma}}\,\sqrt{f}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\frac{1}{\log\dfrac{d_2}{d_1}}$$

Avec : $\varepsilon_r = 1{,}09$; $\sigma = 5{,}65 \cdot 10^7$, $d_1 = 2{,}6$ mm et $d_2 = 9{,}5$ mm :

$$\alpha = 2{,}42\sqrt{f_{\text{MHz}}}\ \text{dB/km}$$

$$\rightarrow\ v_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 287\,356\ \text{km/s}$$

$$\rightarrow\ Z_c = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{d_2}{d_1} = 74{,}4\ \Omega$$

8.8 ABAQUE D'IMPÉDANCES CARACTÉRISTIQUES

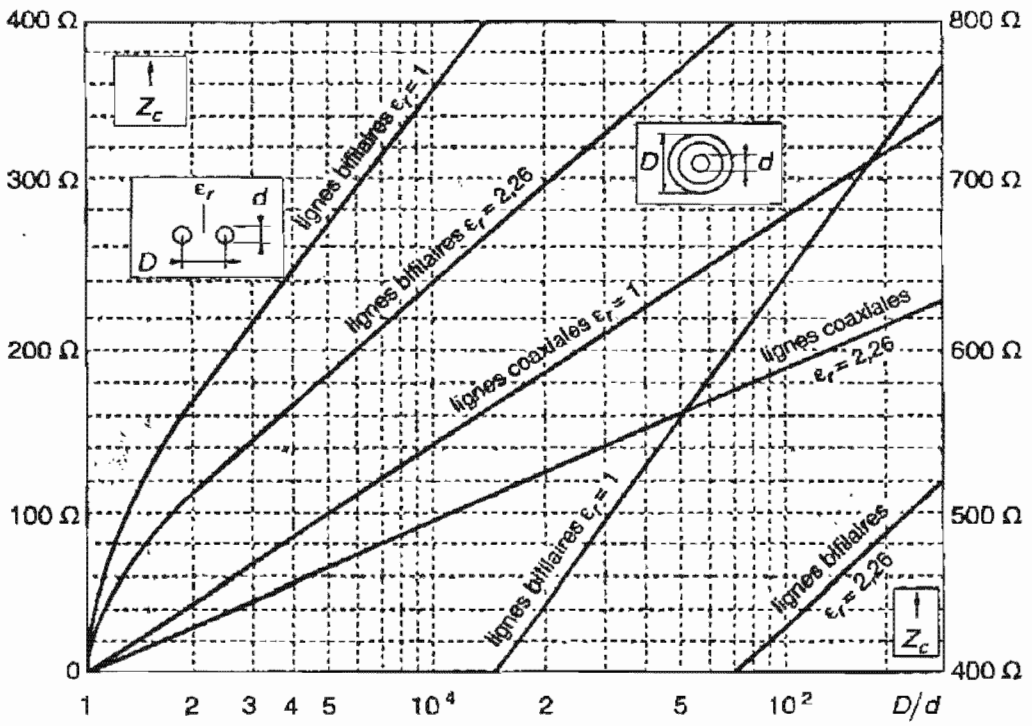


Figure 13. Abaque donnant la variation de l'impédance caractéristique ($0 < Z_c < 400\ \Omega$) et ($400 < Z_c < 800\ \Omega$) en fonction des dimensions géométriques (rapport D/d) de lignes bifilaires et coaxiales à diélectrique air ($\varepsilon_1 = 1$) et polyéthylène ($\varepsilon_r = 2{,}26$).

D'après Liot (L) : « Lignes de transmission et filtres pour très hautes fréquences », Dunod (1959).

Le diagramme de la figure 13, d'après *[27]*, est très intéressant parce qu'il donne les valeurs des impédances caractéristiques des lignes bifilaires et coaxiales dont nous venons d'étudier la technologie, en fonction des dimensions transversales de ces lignes et pour ε_r, constante diélectrique relative de l'isolant, égale à 1 (air) ou à 2,26 (polyéthylène).

EXERCICES

EXERCICE 8.1

(Paragraphe 8.1 – Paramètres primaires d'une ligne coaxiale)

Démontrer les formules (1) à (4) donnant les paramètres primaires d'une ligne coaxiale, en appliquant les lois fondamentales de l'électromagnétisme des régimes stationnaires pour L_1 et C_1 et des régimes variables pour R_1 et G_1.
On tiendra compte de ce que, dans le diélectrique d'un coaxial :

- les lignes de champ électrique sont radiales,
- les lignes de champ magnétique sont des cercles concentriques.

On notera r_1 et r_2 (d_1 et d_2) les rayons (diamètres) des conducteurs intérieur et extérieur.

EXERCICE 8.2

(Paragraphe 8.2.1 – Affaiblissement d'une ligne coaxiale)

Le paramètre d'affaiblissement α d'une ligne coaxiale est la somme de deux termes α_c et α_d qui représentent respectivement les pertes dans les conducteurs et dans le diélectrique.

Démontrer les expressions (9), (10) et (11) de α(Np/m), α_c(dB/m) et α_d(dB/m) dans l'approximation des lignes à faibles pertes.

EXERCICE 8.3

(Paragraphe 8.2.3 – Impédance caractéristique d'une ligne coaxiale)

L'impédance caractéristique d'une ligne à faibles pertes est donnée par :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left(1 - j\frac{R_1}{2L_1\omega} + j\frac{G_1}{2C_1\omega}\right)$$

(exercice 6.2).

Soit une ligne coaxiale utilisée à 100 MHz pour laquelle : $d_2 = 1$ cm, $d_2/d_1 = 3{,}6$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5{,}8 \cdot 10^7$ S/m, $\varepsilon_r = 2{,}25$ et $\text{tg}\,\delta = 10^{-3}$.

1) Démonter que les termes en $R_1/2L_1\omega$ et $G_1/2C_1\omega$ peuvent être négligés.

2) Établir, dans ces conditions, l'expression de Z_c et calculer sa valeur numérique.

EXERCICE 8.4

(Paragraphe 8.4 – Puissance transportable sur une ligne coaxiale)

La puissance transportée par un câble coaxial est donnée par la formule (20) où : E_1 est le champ électrique à la surface du conducteur intérieur, de rayon ρ_1 ; ρ_2 est le rayon du conducteur extérieur ; ε_r est la permittivité relative du diélectrique.

1) Quelle est la valeur optimale du rapport $\rho_2/\rho_1 = x$ pour que la puissance transportée soit maximale pour E_1 et ρ_2 donnés ?

2) On donne : $E_1 = 10^3$ V/cm, $\rho_2 = 1$ cm et $\varepsilon_r = 1$.
Calculer la puissance maximale transportable.

Chapitre 9

Les lignes à bandes et à fentes

9.1 Les principaux types de lignes

Il y a une grande variété de lignes à structure bidimensionnelle, appelées parfois lignes planaires, qui ont été étudiées et ont fait l'objet d'applications pour la réalisation des circuits passifs et aussi des circuits actifs hyperfréquences. Nous les avons classifiées en deux catégories : les lignes à bandes et les lignes à fente.

9.1.1 Les principaux types de lignes à bandes

a) La ligne microbande (en anglais *microstrip*)

Elle comporte un substrat en diélectrique, complètement métallisé sur l'une de ses faces et couvert d'une bande métallique sur l'autre (fig. 1).

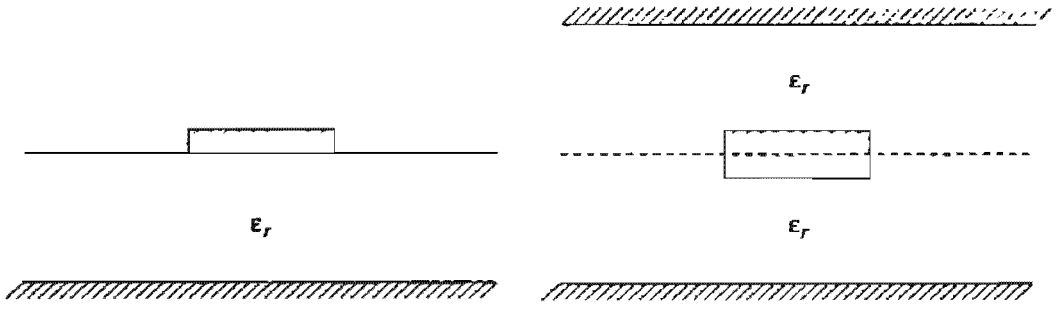
b) La ligne triplaque (*stripline*)

Elle est constituée par deux plaques métalliques séparées par un substrat de diélectrique au sein duquel se trouve une bande métallique (fig. 2).

C'est, en quelque sorte, une ligne microbande rendue symétrique par l'adjonction d'un plan métallique supérieur, image du plan métallique inférieur par rapport au plan où se trouve la bande centrale.

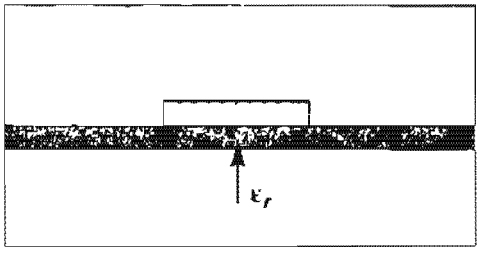
Figure 1. Ligne microbande.

Figure 2. Ligne triplaque.



c) La ligne à substrat suspendu (*suspended substrate line*)

Figure 3. Ligne à substrat suspendu.

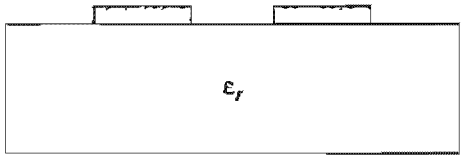


Elle est constituée par un substrat de diélectrique supportant une bande métallique (fig. 3), le tout étant enfermé dans le plan *H* d'un guide d'ondes qui se trouve à la coupure pour la bande de fréquences utilisée. Ce guide d'ondes joue uniquement le rôle de boîtier empêchant le rayonnement de la ligne qui deviendrait non négligeable au-delà de 10 à 20 GHz.

9.1.2 Les principaux types de lignes à fente

a) La ligne à fente (*slot line*)

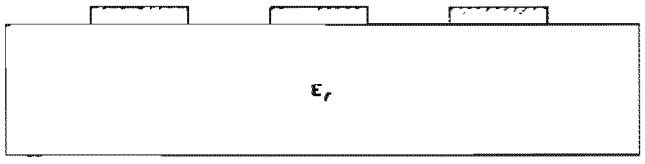
Figure 4. Ligne à fente.



Les deux conducteurs formant la ligne sont déposés sur la même face du substrat diélectrique (fig. 4).

b) Le guide coplanaire (*coplanar wave guide*)

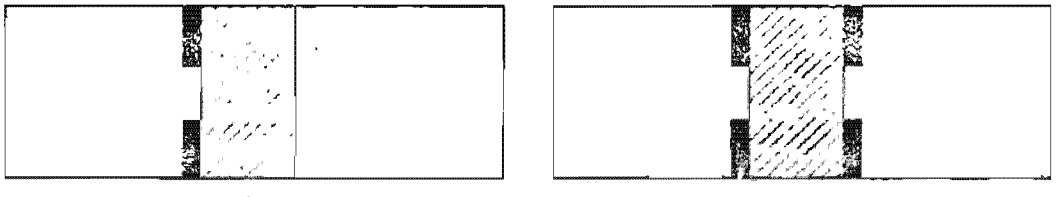
Figure 5. Guide coplanaire.



Il présente 3 bandes métalliques séparées par deux fentes d'un même côté du substrat (fig. 5).

c) La ligne à ailettes (*fin line*)

Figure 6. Lignes à ailettes. *a.* unilatérale, *b.* bilatérale.



C'est une ligne à fente unilatérale (fig. 6a) ou bilatérale (fig. 6b) enfermée (pour éviter des pertes par rayonnement) dans le plan E d'un guide d'ondes à la coupure pour la bande de fréquences utilisée.

La ligne la plus utilisée est, sans conteste, la ligne microbande, en raison de sa simplicité de fabrication et des applications qu'elle permet tant en circuits passifs qu'en circuits actifs. C'est donc elle que nous étudierons le plus longuement. Nous nous intéresserons aussi à la ligne triplaque qui a été très utilisée dans les années 1960 et 70 et dont il existe encore beaucoup de réalisations. La ligne à fente, qui est complémentaire de la microbande, et la ligne à ailettes, qui en est la version à utiliser au-delà de 20 GHz pour éviter les pertes par rayonnement, seront également étudiées : la première dans ce chapitre et la seconde à la fin du chapitre 12 « Les guides d'ondes rectangulaires ». Pour les autres types de lignes et leurs variantes, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés, notamment la référence *[34]*.

9.2 PERMITTIVITÉ EFFECTIVE DES LIGNES MICROBANDE – LONGUEUR D'ONDE ET VITESSE DE PROPAGATION

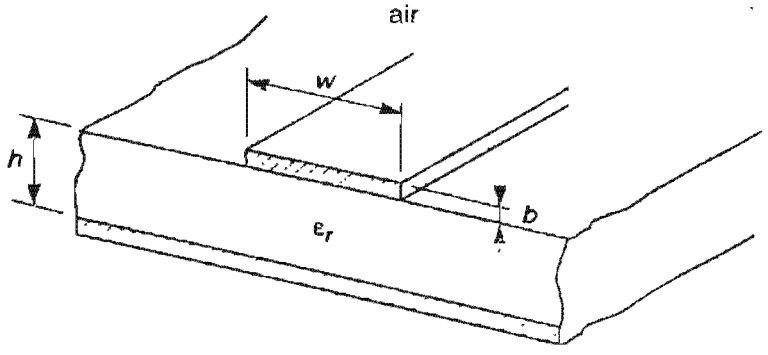


Figure 7.
Paramètres caractéristiques de la ligne microbande.

Les paramètres caractérisant la microbande sont (figure 7) :

- pour le substrat, son épaisseur h et sa constante diélectrique relative qui est souvent élevée ($\approx$ 10) afin d'y concentrer le champ électromagnétique et de réduire ainsi les pertes par rayonnement ;
- pour la bande, sa largeur w qui est, en général, de l'ordre de grandeur de h ($0{,}1 \leqq w/h \leqq 10$) et son épaisseur b, presque toujours petite ($b/h \ll 1$).

La difficulté de l'étude de la propagation dans une ligne microbande vient de ce que cette propagation s'effectue dans le substrat, de permittivité ε_r, et dans l'air, de permittivité 1, comme le montre la forme des lignes de champ électrique sur la figure 8.

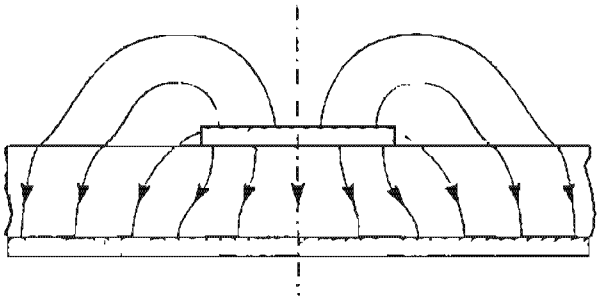


Figure 8. Lignes de champ électrique de la ligne microbande.

Il s'agit donc d'une propagation par modes hybrides ayant les six composantes du champ électromagnétique non nulles.

En fait, les composantes longitudinales E_z et H_z sont très faibles et le mode de propagation dominant peut être considéré comme quasi T.E.M. Mais, même dans ce cas, il est difficile de définir une vitesse de propagation. On sait, en effet, que pour un mode T.E.M. : $Z_m = Z_0/\sqrt{\varepsilon_r}$, ε_r étant la constante diélectrique relative du milieu où s'effectue la propagation. Or, dans notre cas, la propagation s'effectue dans deux milieux de ε_r nettement différents.

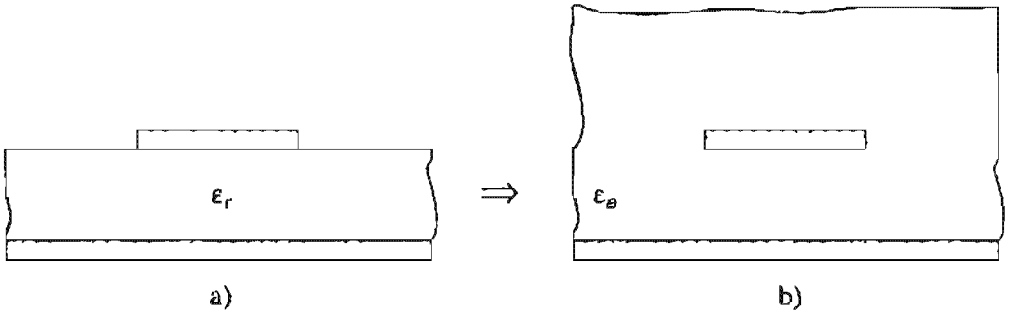


Figure 9. *a.* Microbande réelle. *b.* Microbande équivalente.

Le problème serait beaucoup plus simple si l'on avait un diélectrique homogène et illimité entourant la bande. La vitesse de propagation serait alors définie sans ambiguïté puisque la propagation serait purement T.E.M. C'est pourquoi une des méthodes d'étude de la microbande réelle (fig. 9a) consiste à en rechercher une modélisation équivalente par une ligne microbande à diélectrique homogène illimité, que nous appellerons désormais ligne microbande équivalente (fig. 9b). La clé du problème réside dans la détermination de la constante diélectrique effective ε_e de ce modèle en fonction de ε_r, h et w.

Pendant 25 ans, depuis Assadourian et Rimai (1952) jusqu'à Hammerstad (1975 *[35]*) sans oublier la contribution majeure de Wheeler *[36]* les efforts des chercheurs ont porté sur la détermination la mieux approchée de ε_e, pour les diverses valeurs de w/h.

Une formule explicite de ε_e a été donnée par Hammerstad.

- Pour les bandes telles que $w/h \geq 1$:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}(\varepsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\left(1 + 12\frac{h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

- Pour les bandes telles que $w/h \leq 1$:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}(\varepsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\left[\left(1 + 12\frac{h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0{,}04\left(1 - \frac{w}{h}\right)^2\right] \qquad (2)$$

Ces relations donnent une approximation meilleure que 1 % lorsque $0{,}05 \leq w/h \leq 20$ et $\varepsilon_r \leq 16$. Le graphique de la figure 10 permet de calculer, d'après ces relations, $\sqrt{\varepsilon_e}$ en fonction de w/h pour diverses valeurs de ε_r.

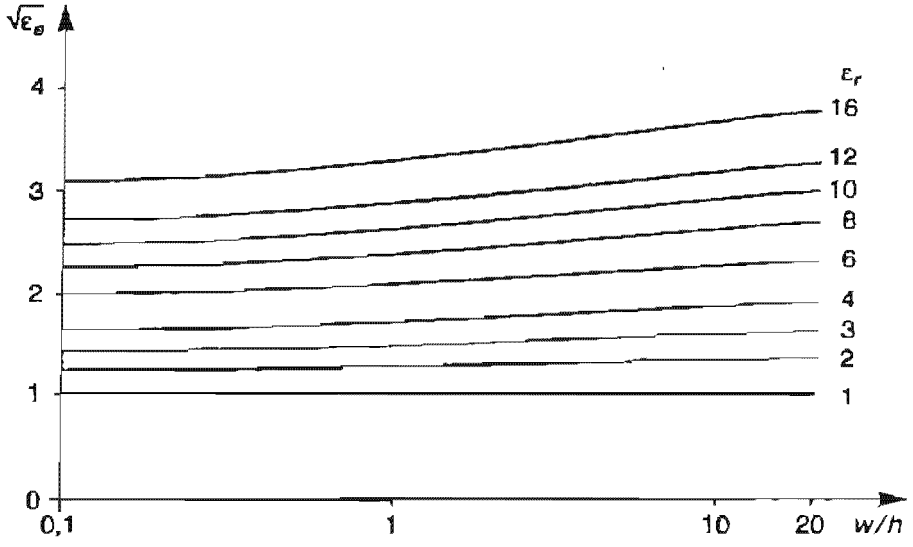


Figure 10.
Abaque pour le calcul de ε_e en fonction de w/h pour diverses valeurs de ε_r. D'après Gardiol *[37, p. 83]*.

Pour une meilleure approximation sur ε_e et un domaine de validité plus étendu concernant w/h et ε_r, on se reportera aux expressions beaucoup plus compliquées de Bhartia et Bahl *[38, p. 277]*.

Notons que, de cette permittivité effective, l'on déduit :

- la longueur d'onde λ_m sur la ligne microbande, d'après :

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} \quad \text{avec} \quad \lambda_0 = \frac{c}{f} \tag{3}$$

- le paramètre de phase β, d'après : $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_m} = \dfrac{2\pi\sqrt{\varepsilon_e}}{\lambda_0}$ (4)

- la vitesse de propagation d'après : $v_p = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_e}}$ (5)

9.3 IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE DES LIGNES MICROBANDE

9.3.1 Résultats de Wheeler pour $b = 0$

- Pour les bandes telles que $w/h > 2$:

$$Z_m = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left| \frac{w}{h} + 0{,}883 + \frac{\varepsilon_r + 1}{\pi \varepsilon_r} \left| \ln\left(\frac{w}{2h} + 0{,}94\right) + 1{,}451 \right| + 0{,}165 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2} \right|^{-1} \quad (6)$$

- Pour les bandes telles que $w/h < 2$:

$$Z_m = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon_r + 1}} \left| \ln\left(\frac{8h}{w}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{w}{2h}\right)^2 - \frac{\varepsilon_r - 1}{2(\varepsilon_r + 1)} \left(\ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon_r} \ln\frac{4}{\pi} \right) \right| \quad (7)$$

La figure 11 permet d'obtenir l'impédance caractéristique Z_m de la ligne microbande d'après :

$$Z_m = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} \quad (8)$$

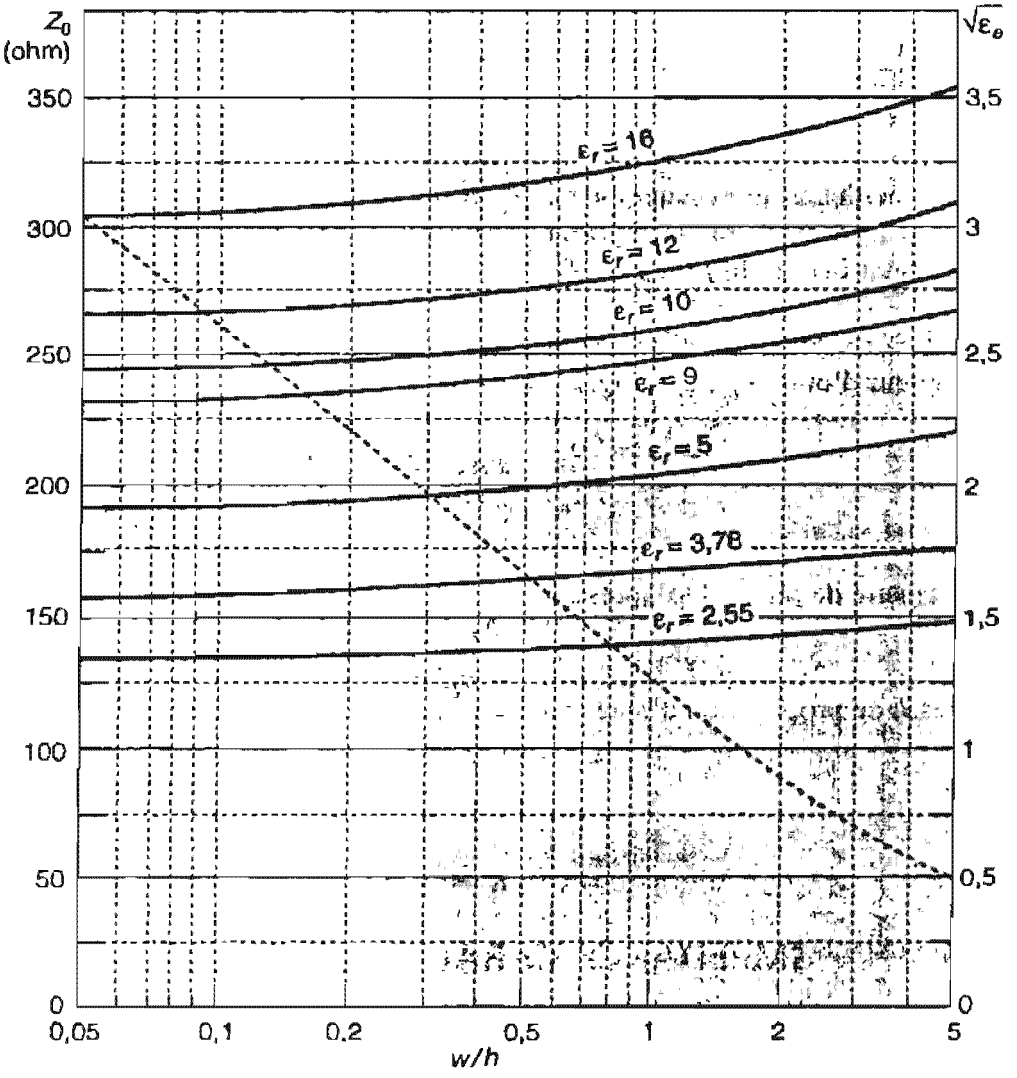


Figure 11. Abaque pour le calcul de $Z_m = Z_0/\sqrt{\varepsilon_e}$, en fonction de w/h pour diverses valeurs de ε_r. D'après Gupta *[34, p. 12]*.

Z_0 est l'impédance caractéristique qu'aurait la même ligne microbande avec uniquement de l'air pour diélectrique. ε_e est la permittivité effective de la micro-

bande équivalente. Pour un rapport w/h donné, Z_0 est obtenu d'après la courbe en tirets et se lit en ordonnées à gauche, tandis que $\sqrt{\varepsilon_e}$ est obtenu d'après l'une des courbes en traits pleins (chacune d'elles correspond à une valeur intéressante de ε_r) et se lit en ordonnées à droite.

9.3.2 Résultats de Hammerstad pour $b = 0$

- **Pour les bandes telles que $w/h > 1$:**

$$Z_m = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_e}} \left[\frac{w}{h} + 1{,}393 + 0{,}667 \ln\left(\frac{w}{h} + 1{,}444 \right) \right]^{-1} \qquad (9)$$

ε_e est donné par la formule (1).

- **Pour les bandes telles que $w/h \leq 1$:**

$$Z_m = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_e}} \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right) \qquad (10)$$

ε_e est donné par la formule (2)

La figure 12 donne les variations de l'impédance caractéristique Z_m en fonction de w/h pour différentes valeurs de ε_r. Cette figure est intéressante à deux points de vue : d'une part elle permet une estimation directe de la valeur approchée de Z_m en fonction de w/h et ε_r ; d'autre part, elle montre que les impédances caractéristiques des lignes microbandes sont comprises entre une dizaine d'ohms pour les plus faibles, qui correspondent à des valeurs élevées de w/h ($w/h \sim 10$) et de ε_r ($\varepsilon_r > 10$), et 200 Ω environ pour les plus fortes qui correspondent à des valeurs faibles de w/h ($w/h = 0{,}1$) et de ε_r ($\varepsilon_r \simeq 2$).

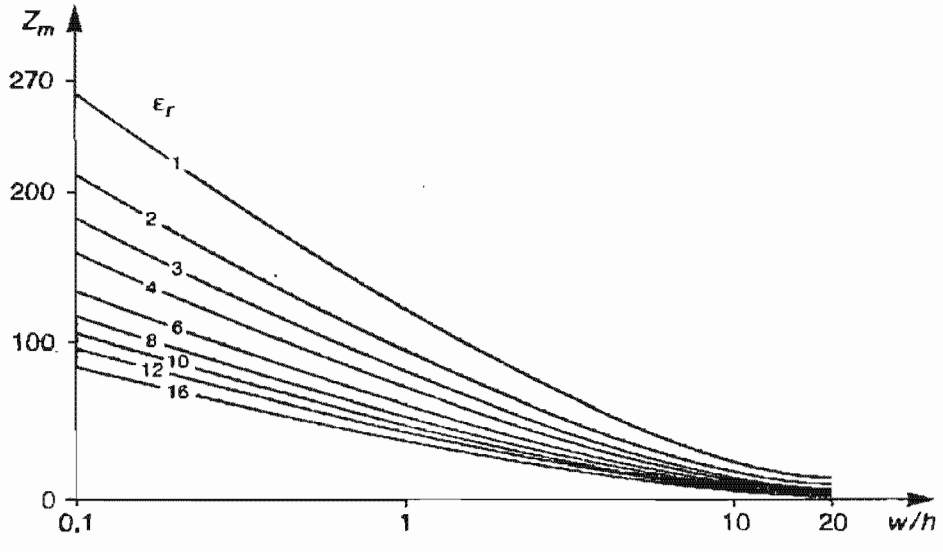


Figure 12.
Abaque pour le calcul de Z_m en fonction de w/h pour diverses valeurs de ε_r. D'après Gardiol *[37, p. 83]*.

9.3.3 Facteurs de correction

Bien que très faible, l'épaisseur de la bande n'est pas nulle. On peut en tenir compte, dans les relations précédentes, en substituant à la largeur réelle w du ruban, une largeur équivalente w_e un peu plus grande, donnée par :

$$w_e = w + \frac{b}{\pi}\left(1 + \ln\frac{2x}{b}\right) \tag{11}$$

avec : $x = h$ si $w > h/2\pi$ et $x = 2\pi w$ si $h/2\pi > w > 2b$.

Par ailleurs, les formules (8), (9) et (10) sont indépendantes de la fréquence. Il est possible d'en tenir compte de façon approchée en remplaçant ε_e dans ces formules

par :
$$\varepsilon_e(f) = \varepsilon_r - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_e}{1 + G\left(\frac{f}{f_d}\right)^2} \tag{12}$$

avec :
$$f_d = \frac{10^7}{8\pi} \cdot \frac{Z_m}{h} \tag{13}$$

et :
$$G = 0{,}6 + 0{,}009\, Z_m \tag{14}$$

Si $f \ll f_d$, il n'est pas nécessaire d'effectuer la correction. D'autres expressions sont données dans *[38, p. 279-280]*.

9.3.4 Dimensions d'une ligne microbande en fonction de Z_m

Des relations dues à Wheeler *[36]* permettent de trouver le rapport w/h en fonction de l'impédance caractéristique Z_m de la ligne réelle (avec $Z_0 = 120\pi$) :

- **Pour le cas où $w/h < 2$:**

$$\frac{w}{h} \simeq 4\left|\frac{1}{2}e^A - e^{-A}\right|^{-1} \tag{15}$$

avec :
$$A = \pi\sqrt{2(\varepsilon_r + 1)}\,\frac{Z_m}{Z_0} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left(0{,}23 + \frac{0{,}11}{\varepsilon_r}\right) \tag{16}$$

- **Pour le cas où $w/h > 2$:**

$$\frac{w}{h} \simeq \frac{\varepsilon_r - 1}{\pi\,\varepsilon_r}\left|\ln(B-1) + 0{,}39 - \frac{0{,}61}{\varepsilon_r}\right| + \frac{2}{\pi}\left[B - 1 - \ln(2B-1)\right] \tag{17}$$

avec : $$B = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{Z_0}{Z_m} \tag{18}$$

9.4 AFFAIBLISSEMENT D'UNE LIGNE MICROBANDE

Il y a trois types de pertes dans les lignes microbandes : dans les conducteurs, dans le diélectrique et par rayonnement. Le calcul étant assez long et complexe, nous ne donnons ici que les résultats, d'après *[34]*.

9.4.1 Pertes dans les conducteurs

• Si $w/h \leqq 1$: $$\alpha_c\,(\text{dB/m}) = 1{,}38\,A\,\frac{R_S}{h\,Z_m} \cdot \frac{32 - \left(\frac{w_e}{h}\right)^2}{32 + \left(\frac{w_e}{h}\right)^2} \tag{19}$$

• Si $w/h \geqq 1$: $$\alpha_c\,(\text{dB/m}) = 6{,}1 \cdot 10^{-5}\,A\,\frac{R_S\,Z_m\,\varepsilon_e}{h}\left|\frac{w_e}{h} + \frac{0{,}667\,\frac{w_e}{h}}{\frac{w_e}{h} + 1{,}444}\right| \tag{20}$$

avec : $$A = 1 + \frac{h}{w_e}\left(1 + \frac{1{,}25}{\pi}\ln\frac{2B}{b}\right) \tag{21}$$

et : $B = h$ si $w/h \geqq 1/2\pi$ et $B = 2\pi w$ si $w/h \leqq 1/2\pi$.

$R_S = \sqrt{\pi\mu\rho f}$ où ρ, résistivité des conducteurs.

Z_m, impédance caractéristique de la microbande.

w_e, largeur équivalente du ruban.

Ces valeurs théoriques sont valables pour des conducteurs dont la surface est plane. Mais si la surface présente des rugosités, l'affaiblissement est nettement plus grand. En pratique, on obtient une limite supérieure de α_c en utilisant la formule approchée suivante :

$$\alpha_c\,(\text{dB/m}) = 8{,}686\,\frac{R_S}{w\,Z_m} \tag{22}$$

9.4.2 Pertes dans le diélectrique

$$\alpha_d\,(\text{dB/m}) = 4{,}34\,\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_e}}\cdot\frac{\varepsilon_e - 1}{\varepsilon_r - 1}\,\sigma_d \qquad (23)$$

ou :

$$\alpha_d\,(\text{dB/m}) = 27{,}3\,\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\cdot\frac{\varepsilon_e - 1}{\sqrt{\varepsilon_e}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\delta}{\lambda_0} \qquad (24)$$

$\sigma_d = \omega\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\operatorname{tg}\delta$ est la conductivité du diélectrique. tg δ est la tangente de l'angle de pertes.

Sauf si le substrat est en semi-conducteur (Silicium ou AsGa), $\alpha_d \ll \alpha_c$ comme le montrent les courbes tracées sur la figure 13.

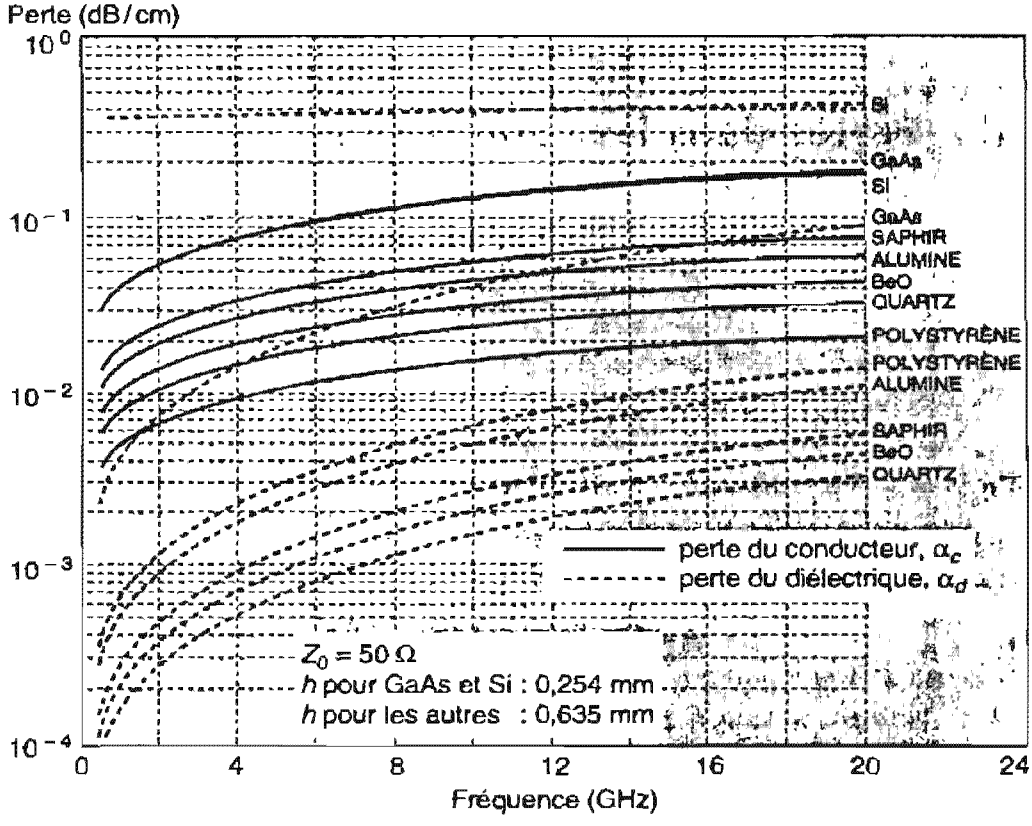


Figure 13. Graphique donnant les pertes conductrices α_c et diélectriques α_d pour différents substrats. D'après Gupta *[34, p. 75]*.

9.4.3 Pertes par rayonnement

Le rayonnement d'une ligne microbande est le fait des modes d'ordre supérieur qui sont engendrés par les discontinuités. D'après Hammerstad ces pertes sont proportionnelles à $(hf)^2/\sqrt{\varepsilon_r}$ pour une ligne de 50 Ω.

La fréquence limite au-dessus de laquelle plus de 1 % de la puissance est rayonnée à l'extrémité d'une ligne ouverte est donnée par :

$$f_M\,(\text{GHz}) = 2{,}14\,\frac{(\varepsilon_r)^{1/4}}{h\,(\text{mm})} \qquad (25)$$

Par exemple *[37, p. 85]*, pour un substrat de $h = 1$ mm, $f_M = 3$ GHz si $\varepsilon_r = 2{,}5$ et $f_M = 4$ GHz si $\varepsilon_r = 10$.

9.5 LA LIGNE TRIPLAQUE

La ligne triplaque (fig. 14) est constituée par trois conducteurs – une bande centrale et deux plans de masse – et elle est remplie par un diélectrique homogène. Elle fonctionne donc en mode T.E.M. tant que sa hauteur b est suffisamment petite pour qu'il n'y apparaisse pas de modes d'ordre supérieur, c'est-à-dire tant que : $b < \lambda_0/2\sqrt{\varepsilon_r}$.

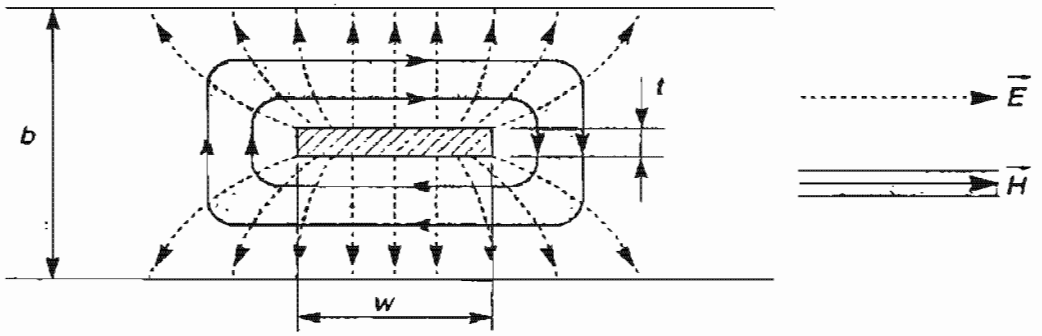


Figure 14.
Coupe transversale d'une ligne triplaque avec les lignes de champ $\vec{E}$ (·····►) et de champ $\vec{H}$ (——►).

Dans ces conditions, les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont contenus dans un plan de section transversale (fig. 14) où ils sont concentrés autour de la bande centrale si bien qu'il est possible de limiter la largeur des deux plaques inférieure et supérieure à $5w$.

Pour le cas limite où $t = 0$ (bande centrale d'épaisseur nulle) l'impédance caractéristique Z_t est donnée par la relation :

$$Z_t\sqrt{\varepsilon_r} = 30\pi\,\frac{K(u)}{K(u')} \qquad (26)$$

$K(u)$ est une intégrale elliptique complète du premier ordre.

$$K(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - u^2 \sin\varphi}\; d\varphi \qquad (27)$$

$$u = \text{ch}^{-1}\,(\pi w/2b) \qquad u' = \sqrt{1 - u^2} = \text{th}\,(\pi\, w/2b)$$

- Si $w/b \leq 0{,}5 \quad (0{,}5 \leq u^2 \leq 1)$

$$Z_t \sqrt{\varepsilon_r} = 30 \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} \right) \tag{28}$$

- Si $w/b \geq 0{,}5 \quad (0 \leq u^2 \leq 0{,}5)$

$$Z_t \sqrt{\varepsilon_r} = 30 \pi^2 \left[\ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{u'}}{1 - \sqrt{u'}} \right) \right]^{-1} \tag{29}$$

Pour les cas où l'épaisseur de la bande centrale n'est pas négligeable, Wheeler *[40]* a calculé les formules suivantes :

$$Z_t \sqrt{\varepsilon_r} = 30 \ln \left[1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{b-t}{w'} \left[\frac{8}{\pi} \cdot \frac{b-t}{w'} + \sqrt{\left(\frac{8}{\pi} \cdot \frac{b-t}{w'} \right)^2 + 6{,}27} \right] \right] \tag{30}$$

où : $$w' = w + \Delta w \tag{31}$$

avec : $$\frac{\Delta w}{b-t} = \frac{x}{\pi (1-x)} \left[1 - \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{x}{2-x} \right)^2 + \left(\frac{0{,}0796x}{\frac{w}{b} + 1{,}1x} \right)^m \right] \right] \tag{32}$$

$$m = 2 \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1-x} \right)^{-1} \tag{33}$$

et : $$x = \frac{t}{b} \tag{34}$$

Pour une détermination plus rapide de l'impédance caractéristique Z_t, il est possible d'utiliser un graphique dû à S.B. Cohn *[d'après 42]* qui donne la valeur de $Z_t \sqrt{\varepsilon_r}$ en fonction du rapport w/b et pour diverses valeurs du rapport t/b (fig. 15).

Pour la conception de circuits micro-ondes utilisant des lignes triplaques, il est essentiel de pouvoir calculer les dimensions de ces lignes permettant d'obtenir une certaine impédance caractéristique. Les courbes précédentes permettent de déterminer directement ou par interpolation les valeurs de w/b et t/b correspondant à la valeur désirée de $\sqrt{\varepsilon_r}\, Z_t$

Pour plus de précision, il est possible d'utiliser des formules de synthèse déduites des formules précédentes ; on les trouvera explicitées dans la référence *[43, p. 58-59]*. La même référence fournit les formules donnant l'atténuation dans les conducteurs et dans le diélectrique de la ligne triplaque.

Notons enfin que tous ces résultats restent valables avec une très bonne précision (au moins un pour cent) tant que la ligne fonctionne en mode T.E.M. La fréquence limite au-dessus de laquelle apparaît le premier mode supérieur est donnée par :

$$f(\text{GHz}) = \frac{0{,}15}{b \sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{b} + \frac{\pi}{4}} \tag{35}$$

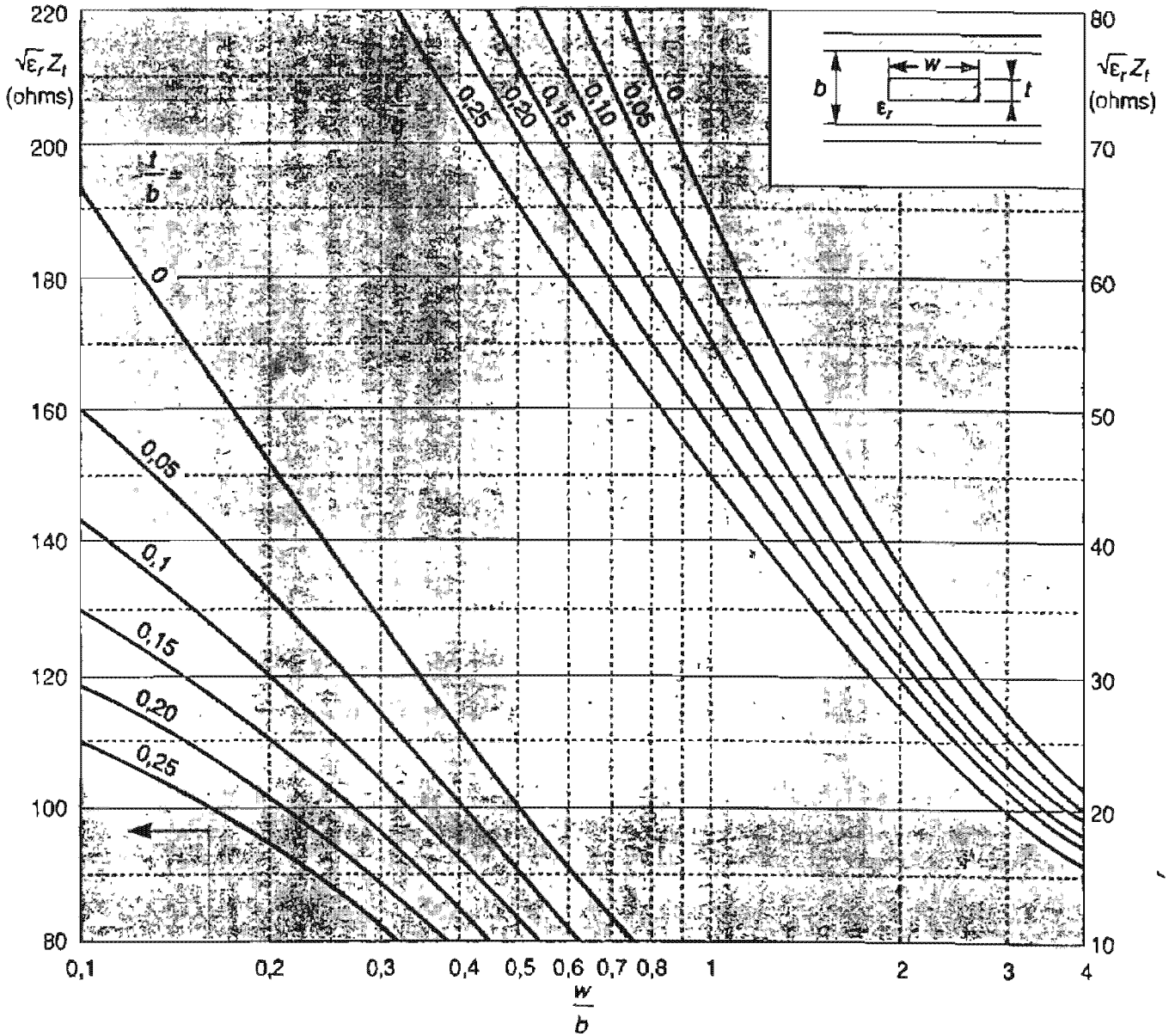


Figure 15. Abaque pour le calcul de $\sqrt{\varepsilon_r}\, Z_t$ d'une ligne triplaque en fonction de w/b pour diverses valeurs de t/b. D'après Saad (T. S) *[42, p. 117]*.

9.6 LA LIGNE À FENTE

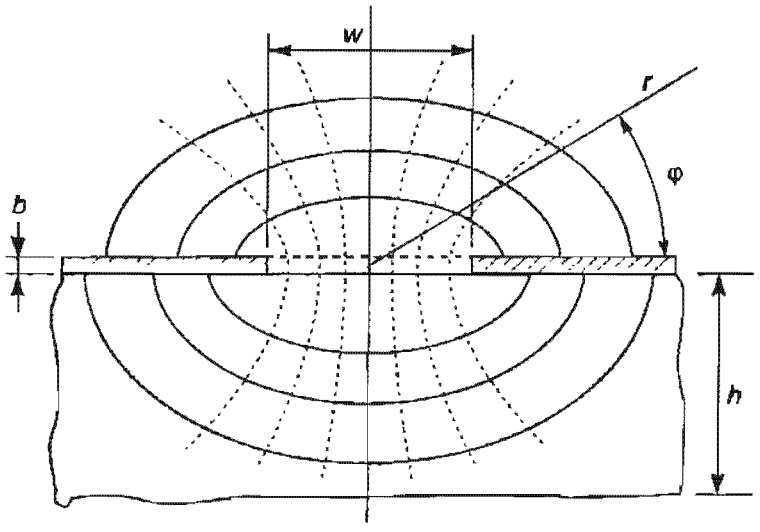


Figure 16. Coupe transversale d'une ligne à fente avec les lignes de champ $\overline{E}$ (·····►) et de champ $\overline{H}$ (——►).

Dans la ligne à fente (*slot line*) les deux conducteurs formant la ligne de transmission sont déposés sur la même face du substrat diélectrique (fig. 16). Les résultats donnés dans ce paragraphe sont tirés de la méthode d'analyse due à Cohn *[44]* qui est la plus généralement utilisée.

9.6.1 Le champ électromagnétique

En étudiant la ligne à fente comme un guide d'ondes électromagnétique, il est possible de déterminer les six composantes du champ électromagnétique. Dans le cas où la largeur w de la fente est très inférieure à la longueur d'onde λ_0 en espace libre, la fente peut être considérée comme une source linéaire de courant magnétique. En zone de champ lointain, c'est-à-dire à des distances $r \gg w$, le champ produit par la fente a trois composantes :

$$H_z = A\, H_0^{(1)}(k_c\, r) \tag{36}$$

$$H_r = -\frac{\gamma_z}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{A}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_S}{\lambda_0}\right)^2}}\, H_1^{(1)}(k_c\, r) \tag{37}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda_S}{\lambda_0} H_r \tag{38}$$

γ_z, est le paramètre de propagation selon l'axe de la fente (axe des z).
λ_S, est la longueur d'onde selon l'axe de la fente.

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_S}\right)^2} \tag{39}$$

Pour que la ligne à fente ait peu de pertes par rayonnement, il convient que ces champs soient concentrés à son voisinage et diminuent donc rapidement avec la

distance r. Il faut, pour cela, que l'argument $k_c r$ des fonctions de Hankel intervenant dans les expressions de H_z, H_r et E_ϕ soit imaginaire. En effet, le comportement asymptotique de telles fonctions est donné par :

$$H_n^{(1)}(jx) \sim \frac{2}{\sqrt{j\pi x}} e^{-x - j\frac{n\pi}{2} - j\frac{\pi}{4}} \qquad (x \text{ grand et} > 0) \qquad (40)$$

Si donc $k_c r = j\,|k_c r|$, tous les champs sont affectés d'un affaiblissement $e^{-k_c r}$. Ceci se produit si : $1 - (\lambda_0/\lambda_S)^2 < 0 \Rightarrow \lambda_0 > \lambda_S$.

Exemple

$\varepsilon_r = 16$ et $f = 3$ GHz $\Rightarrow \dfrac{V(r)}{V(0)} = 0{,}038$ pour $r = \dfrac{\lambda}{4}$.

Or, selon une approximation grossière concernant une fente sur un substrat supposé infini, $\lambda_0/\lambda_S \simeq \sqrt{(\varepsilon_r + 1)/2}$. On a donc intérêt à prendre $\varepsilon_r > 1$ et aussi grand que possible. Le choix de substrats à haute permittivité diélectrique (en pratique, $\varepsilon_r > 9$) permet de concentrer les champs au voisinage de la fente.

Notons enfin que, d'après la formule asymptotique de $H_n^{(1)}(jx)$ donnée ci-dessus, les deux composantes en H_r et H_z du champ magnétique sont en quadrature de phase. Il en résulte que ce champ est polarisé elliptiquement. Cette propriété pourra être utilisée pour réaliser des dispositifs non réciproques, en plaçant au voisinage de la ligne à fente des barreaux de ferrite convenablement polarisés.

9.6.2 Longueur d'onde et impédance caractéristique

Les travaux de Cohn *[44]* ont permis de présenter sous forme graphique les résultats concernant la longueur d'onde λ_S et l'impédance caractéristique Z_S de la ligne à fente pour plusieurs cas particulièrement significatifs (voir par exemple Gupta et *al. [34, p. 204 à 207]*).

Il a été possible de déduire de ces résultats graphiques une formulation empirique qui souffre d'une erreur inférieure à 2 % lorsque $9{,}7 \leqq \varepsilon_r \leqq 20$ pour $b = 0$.

- **Pour $0{,}02 \leqq w/h < 0{,}2$**

$$\frac{\lambda_S}{\lambda_0} = 0{,}923 - 0{,}448 \log \varepsilon_r + 0{,}2\,\frac{w}{h} - \left(0{,}29\,\frac{w}{h} + 0{,}047\right) \log\left(\frac{h}{\lambda_0} \cdot 10^2\right) \qquad (41)$$

$$Z_S = 72{,}62 - 35{,}19 \log \varepsilon_r + 50\,\frac{\left(\frac{w}{h} - 0{,}02\right)\left(\frac{w}{h} - 0{,}1\right)}{\frac{w}{h}}$$

$$+ \log\left(\frac{w}{h} \cdot 10^2\right)\left(44{,}28 - 19{,}58 \log \varepsilon_r\right) - \left|0{,}32 \log\ \varepsilon_r - 0{,}11\right.$$

$$\left. + \frac{w}{h}\,(1{,}07 \log \varepsilon_r + 1{,}44)\right| \cdot \left|11{,}4 - 6{,}07 \log \varepsilon_r - \left(\frac{h}{\lambda_0} \cdot 10^2\right)\right|^2 \qquad (42)$$

- **Pour $0,2 \leqq w/h \leqq 1$**

$$\frac{\lambda_S}{\lambda_0} = 0,987 - 0,483 \log \varepsilon_r + \frac{w}{h}(0,111 - 0,0022\,\varepsilon_r) - \left(0,121 + 0,094\,\frac{w}{h} - 0,0032\,\varepsilon_r\right) \log\left(\frac{h}{\lambda_0} \cdot 10^2\right) \tag{43}$$

$$Z_S = 113,19 - 53,55 \log \varepsilon_r + 1,25\,\frac{w}{h}(114,59 - 51,88 \log \varepsilon_r) + 20\left(\frac{w}{h} - 0,2\right)\left(1 - \frac{w}{h}\right) - \left|0,15 + 0,23 \log \varepsilon_r + \frac{w}{h}(-0,79 + 2,07 \log \varepsilon_r)\right| \cdot \left|10,25 - 5 \log \varepsilon_r + \frac{w}{h}(2,1 - 1,42 \log \varepsilon_r) - \frac{h}{\lambda_0} \cdot 10^2\right|^2 \tag{44}$$

EXERCICES

EXERCICE 9.1

(Paragraphe 9.2 – Permittivité effective des lignes microbande et 9.3 – Abaque de Wheeler)

Une ligne microbande a pour dimensions géométriques $h = 0{,}635$ mm et $w = h/2$. Son diélectrique a pour caractéristiques : $\varepsilon_r = 9$ et $\text{tg}\,\delta = 10^{-3}$.

1) Calculer sa permittivité équivalente ε_e et comparer cette valeur avec le résultat trouvé graphiquement.
2) Trouver Z_m d'après l'abaque de Wheeler et comparer cette valeur avec le résultat calculé à partir des formules.

EXERCICE 9.2

(Paragraphe 9.3.1 – Résultat de Wheeler)

Démonstration de la formule (8) :

$$Z_m = Z_0/\sqrt{\varepsilon_e}.$$

EXERCICE 9.3

(Paragraphe 9.3.3 – Facteurs de correction)

Les données sont les mêmes qu'à l'exercice 9.1 et $Z_m = 70\ \Omega$.

Déterminer la fréquence à partir de laquelle on peut considérer que le terme de correction fréquentielle a une importance inférieure à 1 % dans la formule donnant $\varepsilon_e(f)$.

EXERCICE 9.4

(Paragraphes 9.3.3 et 9.3.4 – Dimension d'une ligne microbande en fonction de Z_m)

On veut obtenir une impédance caractéristique de 50 Ω avec une ligne microbande dont le substrat a pour permittivité $\varepsilon_r = 10$. Calculer la valeur du rapport w/h.

Si $h = 0{,}635$ mm et $b = 0{,}01$ mm (épaisseur de la métallisation), calculer la largeur w_e du ruban.

EXERCICE 9.5

(Paragraphe 9.4 – Affaiblissement d'une ligne microbande)

Une ligne microbande a pour dimensions géométriques : $h = 0{,}635$ mm et $w = h$. Son diélectrique a pour caractéristiques : $\varepsilon_r = 9$ et $\text{tg}\,\delta = 10^{-3}$.

1) Quelle est la fréquence en dessous de laquelle on peut considérer que les pertes par rayonnement sont négligeables ?
2) Pour $f = 1$ GHz, faire le calcul des pertes dans les conducteurs, sachant que la résistivité de la métallisation est $\rho = 0{,}18 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot \text{m}$ et son épaisseur $b = 0{,}01$ mm.
3) Calculer enfin les pertes dans le diélectrique.

EXERCICE 9.6

(Paragraphe 9.5 – La ligne triplaque)

1) Calculer les rapports w/b et t/b (fig. 15) pour obtenir une impédance caractéristique de 50 Ω avec une ligne triplaque dont le diélectrique a une permittivité $\varepsilon_r = 2{,}26$

2) Dans le cas où $w/b = 0{,}6$ et $b = 1$ cm, quelle est la fréquence limite pour un fonctionnement en mode T.E.M. ?

Chapitre 10

Réalisation des impédances et des circuits résonnants

En régime alternatif, jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10 MHz, les composants passifs tels que les résistances, inductances ou condensateurs classiques présentent des caractéristiques (R, L, C) qui sont indépendantes de la fréquence et les tronçons de lignes connectant ces composants (dans les circuits non intégrés) ont un comportement « neutre ». On dit qu'il s'agit d'éléments à « constantes localisées ». Pour des fréquences supérieures (hautes fréquences), au contraire, les composants passifs classiques ont des caractéristiques (R, L, C) qui ne correspondent plus aux valeurs nominales données par les constructeurs et varient avec la fréquence, tandis que les lignes de connexion se comportent comme des impédances dont l'inductance ou la capacité change avec la fréquence. On dit alors qu'il s'agit d'éléments à « constantes réparties ou distribuées ».

Dans une première partie de ce chapitre, nous allons voir comment il est possible de tirer parti du comportement de tronçons de ligne pour réaliser des inductances et des condensateurs (§ 10.1 et § 10.2) ou des circuits résonnants (§ 10.3 et § 10.4). Ces tronçons de ligne, qui ont des dimensions très petites devant la longueur d'onde, peuvent être considérés comme des éléments à constantes « semi-localisées » puisque leurs caractéristiques sont à bande relativement étroite.

C'est pourquoi toute une technologie – rendue possible par le développement des techniques photolithographiques de miniaturisation – s'est développée pour

élaborer jusqu'à des fréquences de plus en plus élevées (30 GHz en 1996) des composants dont les caractéristiques restent indépendantes de la fréquence et méritent donc le label « constantes localisées ». Le paragraphe 10.5 expose les réalisations correspondantes.

10.1 ÉQUIVALENCE ENTRE UN TRONÇON DE LIGNE ET UNE INDUCTANCE OU UN CONDENSATEUR

Nous savons qu'un tronçon de ligne d'impédance caractéristique Z_c, fermé sur une impédance Z_R, présente, à une distance x de cette dernière (fig. 1), une impédance $Z(x)$ donnée par :

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_R + j\, Z_c \operatorname{tg} \beta x}{Z_c + j\, Z_R \operatorname{tg} \beta x} \qquad (1)$$

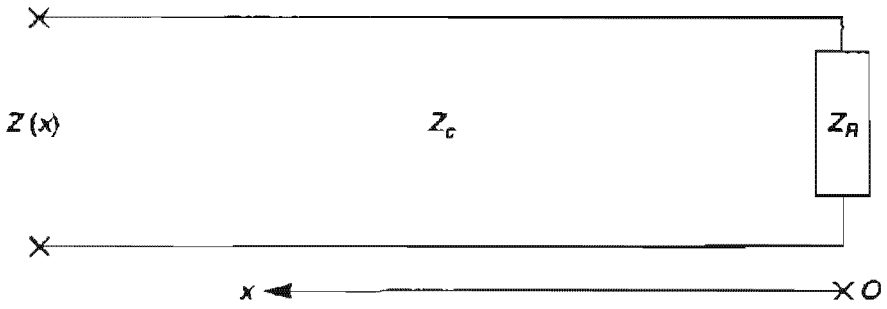


Figure 1. Notations et conventions utilisées pour un tronçon de ligne.

Les tronçons utilisés ont une longueur x telle que : $\operatorname{tg} \beta x = \beta x$, à 10 % près $\Rightarrow \beta x < \pi/6$ ou $x < \lambda/12$.

Dans ces conditions, (1) peut s'écrire :

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_R + j\, Z_c \beta x}{Z_c + j\, Z_R \beta x} \qquad (2)$$

a) Cas où $Z_R \ll Z_c \beta x$

La réalisation technologique de cette condition peut se faire avec une ligne dont l'impédance caractéristique Z_c est très grande devant son impédance de charge Z_R. Pour avoir Z_c élevée avec une ligne microbande, nous voyons, d'après la figure 6 (chap. 9), qu'il faut un rapport w/h inférieur à 1 et une permittivité ε_r faible.

Remarquons que, puisque $\beta x < \pi/6$, la condition $Z_R \ll Z_c \beta x$ implique numériquement que $Z_R \beta x \ll Z_c$; nous avons alors, d'après (2) :

$$Z(x) \simeq j\, Z_c \beta x = j\, Z_c \frac{\omega}{v} x$$

Un tel tronçon de ligne se comporte donc comme une impédance inductive $jL\omega$ et l'on peut dire qu'il est équivalent à l'inductance

$$L = Z_c \frac{x}{v} \tag{3}$$

Un cas particulier de la condition $Z_R \ll Z_c\, \beta x$ est le cas où la ligne est en court-circuit ($Z_R = 0$). Dans ce cas, $Z(x) = j\, Z_c\, \text{tg}\, \beta x$ et nous savons (chap. 3, § 3.3.1.b) que cette impédance est inductive pour $0 < x < \lambda/4$.

b) Cas où $Z_R\, \beta x \gg Z_c$

La réalisation technologique de cette condition peut se faire avec une ligne dont l'impédance caractéristique Z_c est très petite devant son impédance de charge Z_R. Pour avoir Z_c faible avec une ligne microbande, nous voyons toujours d'après la figure 6 (chap. 9), qu'il faut un rapport w/h supérieur à 1 et une permittivité ε_r élevée ; en fait, au-delà de $w/h = 6$ et $\varepsilon_r = 6$, la diminution de Z_c est très lente.

Remarquons aussi que, puisque $\beta x < \pi/6$, il en résulte numériquement que $Z_R \gg Z_c\, \beta x$; dans ces conditions, nous obtenons d'après (2) :

$$Z(x) \simeq -j \frac{Z_c}{\beta x} = -j\, Z_c \frac{v}{\omega} \cdot \frac{1}{x}$$

Un tel tronçon de ligne se comporte donc comme une impédance capacitive $-j/C\omega$ et il est équivalent à la capacité :

$$C = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{x}{v} \tag{4}$$

Un cas particulier de la condition $Z_R\, \beta x \gg Z_c$ est le cas où la ligne est en circuit ouvert ($Z_R = \infty$). Dans ce cas, $Z(x) = -j\, Z_c\, \text{cotg}\, \beta x$, impédance qui est capacitive pour $0 < x < \lambda/4$.

Il serait possible d'arriver aux mêmes conclusions à partir de la représentation quadripolaire classique d'un tronçon de ligne de longueur unité (fig. 2a)

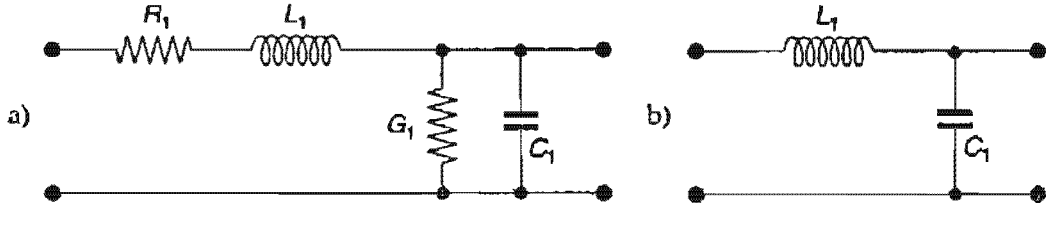


Figure 2. Représentation quadripolaire d'un tronçon de ligne. *a.* Avec pertes. *b.* Sans perte.

Si nous nous plaçons dans l'approximation des lignes sans perte (qui est utilisée dans le raisonnement précédent), le quadripôle se réduit à celui représenté sur la figure 2b. Pour un tel quadripôle, nous pouvons écrire, d'après la théorie des lignes :

$$\beta = \omega \sqrt{L_1\, C_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{v} = \sqrt{(L_1\, \omega)\, (C_1\, \omega)}$$

D'autre part : $$Z_c = \sqrt{\frac{L_1 \omega}{C_1 \omega}}$$

D'où : $$L_1 \omega = \frac{\omega}{v} Z_c \quad \text{et} \quad C_1 \omega = \frac{\omega}{v} \cdot \frac{1}{Z_c}$$

Donc, pour un tronçon de ligne de longueur ℓ :

$$L\omega = \frac{\omega \ell}{v} Z_c \quad \text{et} \quad C\omega = \frac{\omega \ell}{v} \cdot \frac{1}{Z_c}$$

La représentation quadripolaire d'un tronçon de ligne n'étant valable que pour des longueurs de ligne $\ell \ll \lambda$ (en pratique $\ell < \lambda/10$), nous pouvons dire que, dans ces conditions :

- *Pour modéliser une inductance série*, il faut prendre un tronçon de ligne à forte impédance caractéristique car alors $L\omega \gg C\omega$. Cette inductance a pour valeur : $L = Z_c \ell/v$. C'est la relation (3).
- *Pour modéliser une capacité parallèle*, il faut prendre un tronçon de ligne à faible impédance caractéristique car alors $L\omega \ll C\omega$. Cette capacité a pour valeur : $C = (1/Z_c) \cdot (\ell/v)$. C'est la relation (4).

10.2 RÉALISATION D'INDUCTANCES ET CONDENSATEURS

De tout ce qui vient d'être expliqué découle la réalisation d'inductances et condensateurs avec des tronçons de ligne. Cette réalisation est particulièrement aisée en technologie microbande puisque l'impédance caractéristique d'une telle ligne est inversement proportionnelle à la largeur de la bande.

- Une inductance série (fig. 3) s'obtient par un fort rétrécissement de la bande métallique ; en effet, le tronçon de faible largeur, qui présente donc une forte impédance caractéristique, se trouve chargé à ses extrémités par des lignes dont l'impédance caractéristique est plus faible (condition du cas où $Z_R \ll Z_c \beta x$).

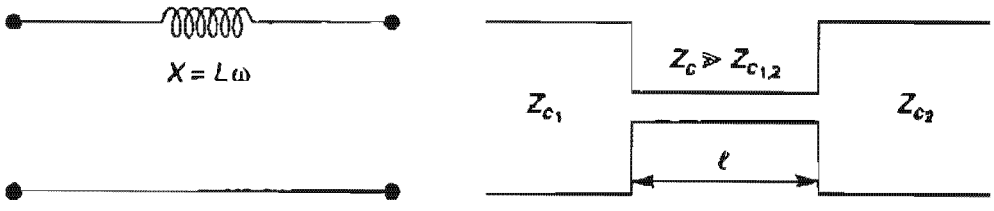


Figure 3. Réalisation d'une inductance série en ligne microbande.

- Une inductance parallèle (fig. 4) s'obtient en plaçant en dérivation sur la ligne principale un tronçon de ligne court-circuité. Ceci peut d'ailleurs se faire aussi bien en technologie microbande (fig. 4 b) que coaxiale (fig. 4 c).

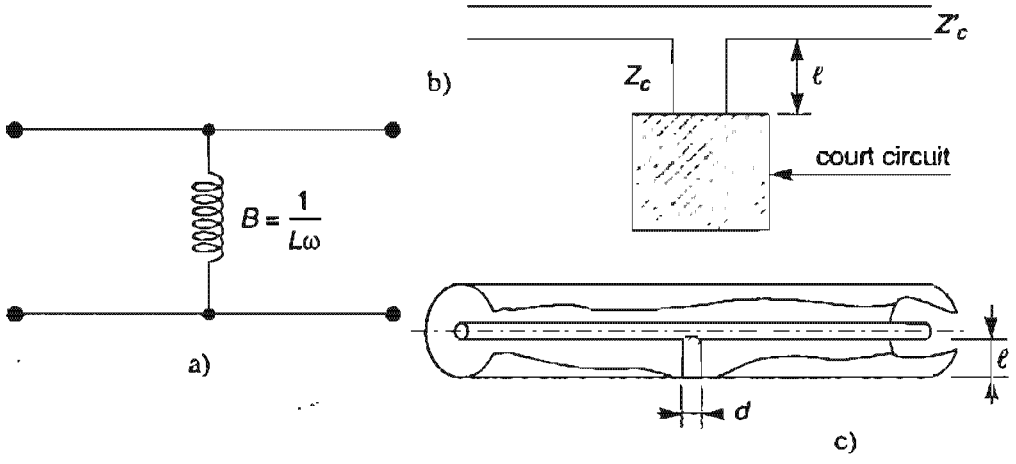


Figure 4.
a. Réalisation d'une inductance parallèle.
b. En ligne microbande.
c. En ligne coaxiale.

- Une capacité parallèle (fig. 5) s'obtient par un élargissement important de la bande métallique ; ce tronçon, qui présente une faible impédance caractéristique, se trouve chargé à ses extrémité par des lignes dont l'impédance caractéristique est plus forte (condition du cas où $Z_R\,\beta x \gg Z_c$).

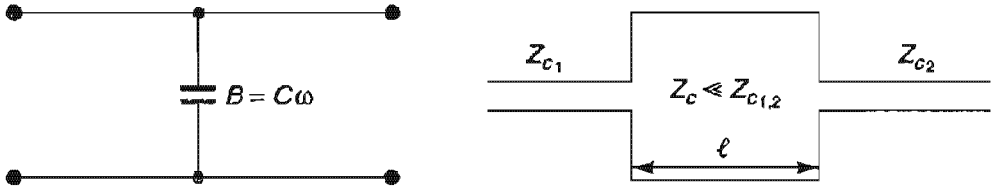


Figure 5.
Réalisation d'une capacité parallèle en ligne microbande.

- Une capacité série est plus délicate à réaliser car elle nécessite de couper la ligne sur une très petite longueur (quelques microns ou dizaines de microns). Quantitativement, la valeur de la capacité ainsi obtenue ne peut se calculer qu'avec une approximation grossière et qualitativement, le schéma équivalent d'une telle discontinuité comporte non seulement une capacité en série, mais aussi des capacités parasites en parallèle. Aussi préfère-t-on utiliser des capacités sous forme d'éléments localisés telles que celles qui sont décrites au paragraphe 10.5.3 « Réalisation des condensateurs ».

10.2.1 Discontinuité dans la largeur d'une ligne microbande

Les réalisations qui viennent d'être étudiées présentent des discontinuités dans la largeur w de la ligne microbande. La figure 6a montre une telle discontinuité et la figure 6b représente sa modélisation par une cellule en T comprenant deux inductances séries L_1, L_2 et une capacité parallèle C_S. La référence *[52, p. 130 et sq]* étudie, parmi d'autres, ce type de discontinuité.

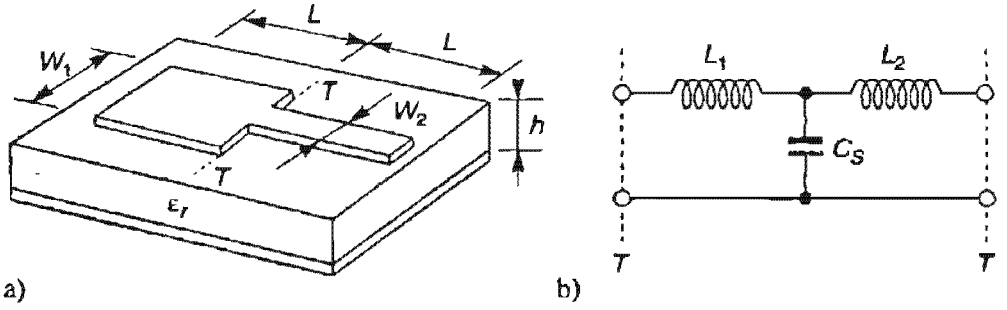


Figure 6.
a. Discontinuité dans la largeur d'une ligne microbande.
b. Modélisation.

• **Les inductances L_1 et L_2 sont données par :**

$$L_1 = \frac{L_{w_1}}{L_{w_1} + L_{w_2}} L_S \tag{5}$$

et

$$L_2 = \frac{L_{w_2}}{L_{w_1} + L_{w_2}} L_S \tag{6}$$

La valeur approchée de $L_S = L_1 + L_2$ est la suivante :

$$L_S\,(\text{nH}) = h\left[40{,}5\left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right) - 75 \log \frac{w_1}{w_2} + 0{,}2\left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right)^2\right] \tag{7}$$

Cette relation est approchée à mieux que 5 % pour $w_1/w_2 \leqq 5$ et $w_2/h = 1$.

$L_{w_{1,2}}$ est l'inductance par unité de longueur d'une microbande de largeur $w_{1,2}$, d'impédance caractéristique Z_m et de permittivité effective ε_e, sa valeur est :

$$L_w\,(\text{H/m}) = \frac{Z_m \sqrt{\varepsilon_e}}{3 \cdot 10^8} \tag{8}$$

• **Pour la capacité C_S, nous avons :**

$$C_S\,(\text{pF}) = \sqrt{w_1\, w_2}\left[(10{,}1 \log \varepsilon_r + 2{,}33)\frac{w_1}{w_2} - 12{,}6 \log \varepsilon_r - 3{,}17\right] \tag{9}$$

Cette expression approchée donne une précision meilleure que 10 % pour : $\varepsilon_r \leqq 10$ et $1{,}5 \leqq w_1/w_2 \leqq 3{,}5$.

Dans le cas d'un substrat d'alumine ($\varepsilon_r = 9{,}6$), C_S est fourni avec une précision de l'ordre de 0,5 % par :

$$C_S\,(\text{pF}) = \sqrt{w_1\, w_2}\left[130 \log\left(\frac{w_1}{w_2}\right) - 44\right] \quad \text{pour } 1{,}5 \leqq \frac{w_1}{w_2} \leqq 10 \tag{10}$$

10.2.2 Cas particulier d'un circuit ouvert

Si l'on raisonne selon les concepts des circuits à constantes distribuées, cette capacité C_S a le même effet qu'une augmentation $\Delta\ell$ de la longueur de la ligne la plus large (fig. 6a), compensée par une diminution de la même longueur de la ligne la plus étroite. Une expression approchée de $\Delta\ell$ est :

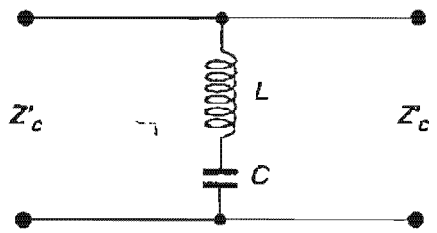
$$\Delta\ell = \Delta\ell_{co}\left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right), \tag{11}$$

Si $w_2 = 0$, la discontinuité est un circuit ouvert et $\Delta\ell = \Delta\ell_{co}$; $\Delta\ell_{co}$ est donc l'augmentation de longueur correspondant à la capacité qui modéliserait l'effet de bout dû à un circuit ouvert :

$$\Delta\ell_{co} = 0{,}412h\,\frac{\varepsilon_e + 0{,}3}{\varepsilon_e - 0{,}258}\left(\frac{\frac{w}{h} + 0{,}264}{\frac{w}{h} + 0{,}8}\right) \tag{12}$$

10.3 RÉALISATION DE CIRCUITS RÉSONNANTS

Nous avons signalé au paragraphe précédent la difficulté qu'il y avait à réaliser des capacités série avec des tronçons de ligne. Il en résulte que les seuls circuits résonnants que l'on puisse réaliser en lignes microbandes sont des circuits série (fig. 7) ou des circuits parallèle (fig. 8) placés en dérivation sur la ligne principale.



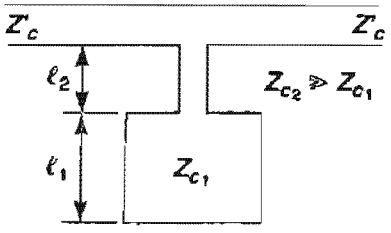
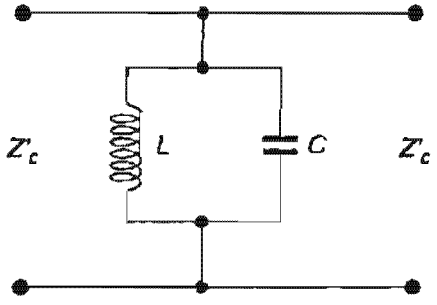
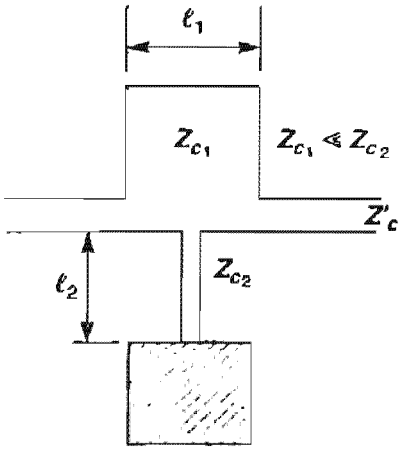


Figure 7. Réalisation d'un circuit résonnant série mis en dérivation sur une ligne microbande.





Figue 8. Réalisation d'un circuit résonnant parallèle mis en dérivation sur une ligne microbande.

■ Pour ce qui est des circuits résonnants série ou parallèle placés en série sur la ligne principale, ils ne peuvent être obtenus, à partir des précédents, qu'en utilisant la propriété qu'ont les lignes quart d'onde d'inverser les impédances. Nous savons, en effet, que l'impédance d'entrée Z_e d'une ligne $\lambda/4$, d'impédance caractéristique Z_c, chargée par une impédance Z_S est : $Z_e = Z_c^2/Z_S$.

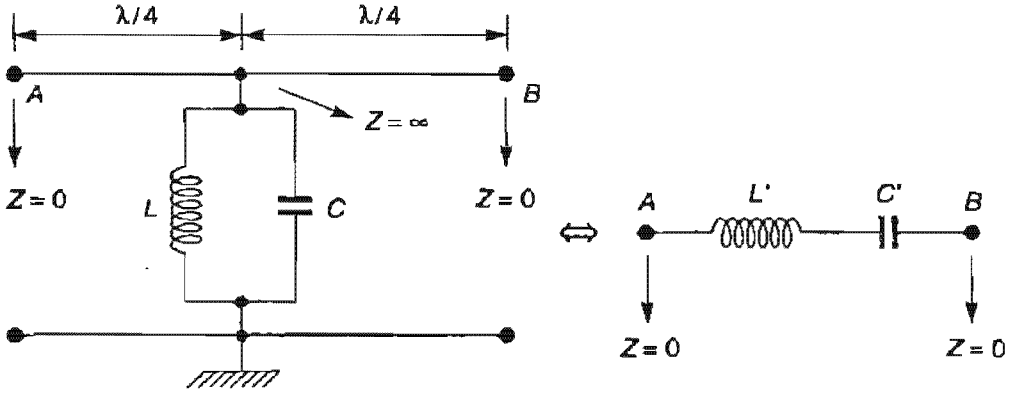


Figure 9. Réseau équivalent à un circuit résonnant série (L', C') mis en série sur une ligne.

Ainsi, un circuit résonnant parallèle mis en dérivation entre deux lignes quart-d'onde est équivalent à un circuit résonnant série mis sur la ligne principale (fig. 9). Pour que les deux circuits soient équivalents, il faut que les impédances vues à leurs bornes A et B soient les mêmes pour $\omega = \omega_0$ ($Z = 0$) et pour $\omega \neq \omega_0$. Les conditions d'équivalence (exercice 10.2) sont :

$$L\,\omega_0 = \frac{Z_c^2}{L'\,\omega_0} \tag{13}$$

et

$$C\,\omega_0 = \frac{Y_c^2}{C'\,\omega_0} \tag{14}$$

Z_c est l'impédance caractéristique de la ligne $\lambda/4$; $Y_c = 1/Z_c$.

■ De même, un circuit résonnant série mis en dérivation entre deux lignes quart-d'onde est équivalent à un circuit résonnant parallèle mis en série sur la ligne principale (fig. 10).

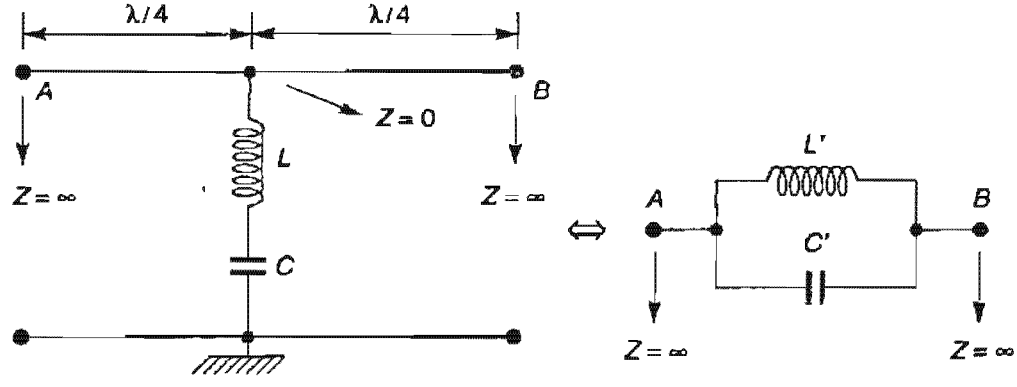


Figure 10. Réseau équivalent à un circuit résonnant parallèle (L', C') mis en série sur une ligne.

Les conditions d'équivalence sont exactement les mêmes que dans le cas précédent.

Réseaux inverseurs d'impédance ou d'admittance

Il serait également possible d'utiliser d'autres types de réseaux inverseurs que la ligne $\lambda/4$: réseaux quadripolaires ou longueurs de ligne, avec des éléments réactifs en série ou en parallèle (fig. 11a et 11b) *[45, 52]*.

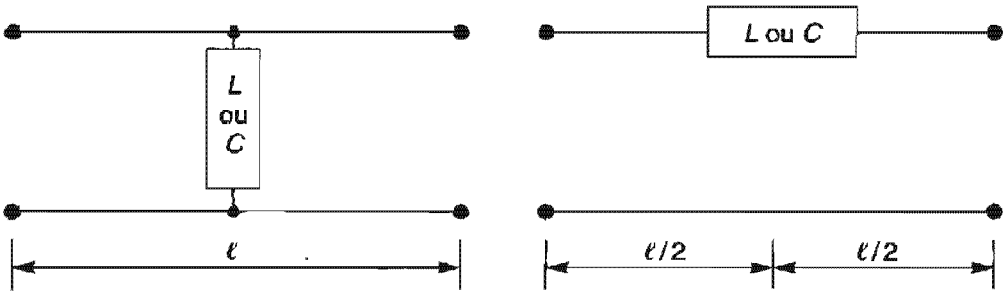


Figure 11.
a. Réseau inverseur d'impédances
b. Réseau inverseur d'admittances.

• *Le réseau de la figure 11a est un réseau inverseur d'impédances* : une réactance $X = L\omega$ ou $X = -1/C\omega$ est mise en parallèle sur une ligne d'impédance caractéristique Z_c et de longueur ℓ. Les impédances d'entrée Z_e et de sortie Z_s sont reliées par un coefficient de transformation d'impédances K tel que :

$$Z_e = \frac{K^2}{Z_s} \tag{15}$$

Le coefficient K se calcule d'après :

$$K = Z_c \operatorname{tg}\left|\frac{\theta}{2}\right| \tag{16}$$

avec

$$\theta = \frac{2\pi\ell}{\lambda} \tag{17}$$

θ est lié à X par :

$$\theta = -\operatorname{arctg}\frac{2X}{Z_c} \tag{18}$$

Si $X > 0 \rightarrow \theta < 0$ et $\ell < 0$. Il s'agit d'une longueur de ligne fictive qui devra être déduite des longueurs des autres lignes se trouvant de part et d'autre de ce réseau.

Si $X < 0 \rightarrow \theta > 0$ et $\ell > 0$. Il s'agit ici d'une longueur de ligne réelle.

• *Le réseau de la figure 11b est un réseau inverseur d'admittances* : une susceptance $B = -1/L\omega$ ou $B = C\omega$ est mise en série sur une ligne d'admittance caractéristique Y_c et de longueur ℓ. Les admittances d'entrée Y_e et de sortie Y_s, sont reliées par un coefficient de transformation d'admittance J tel que :

$$Y_e = \frac{J^2}{Y_s} \tag{19}$$

Le coefficient J se calcule d'après :

$$J = Y_c \operatorname{tg}\left|\frac{\theta}{2}\right| \tag{20}$$

avec : $\theta = 2\pi\ell/\lambda$ (17).

θ est lié à B par la relation : $$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{2B}{Y_c} \qquad (21)$$

10.4 ÉQUIVALENCE ENTRE UNE LIGNE $\lambda/4$ OU $\lambda/2$ ET UN CIRCUIT RÉSONNANT

Des lignes de longueur $\lambda/4$ ou $\lambda/2$ court-circuitées ou en circuit ouvert sont équivalentes, selon les cas, à des circuits résonnants série ($Z = 0$) ou parallèle ($Z = \infty$). Mais, pour établir cette équivalence, nous devons nous assurer que le comportement d'une telle ligne et du circuit résonnant correspondant sont les mêmes lorsque la fréquence varie autour de la résonance.

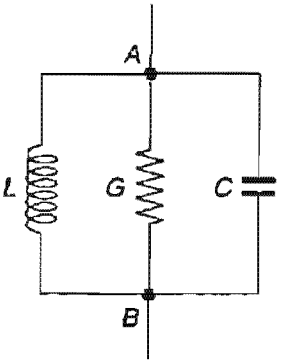


Figure 12. Circuit résonnant parallèle avec conductance de pertes.

a) Considérons le circuit résonnant parallèle de la figure 12, G étant la conductance de pertes et Q le coefficient de surtension en charge.

La susceptance de ce circuit, pour une variation $\Delta\omega$ autour de ω_0, est :

$$B = 2\frac{G}{Q} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} = 2C\,\omega_0 \frac{\Delta\omega}{\omega} \qquad (22)$$

Le taux de variation de la susceptance au voisinage de ω_0 est :

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{2G}{Q\,\omega_0} = 2C \qquad (23)$$

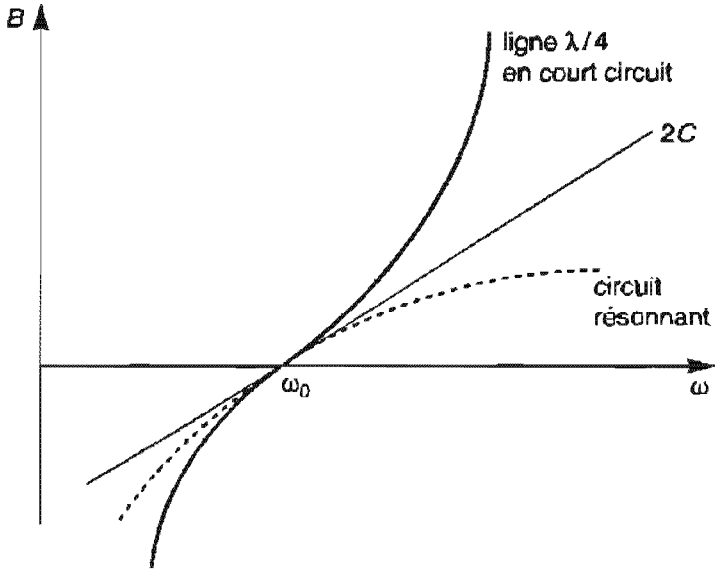


Figure 13. Variation de la susceptance B en fonction de la pulsation ω.

La variation exacte de B est donnée par la courbe en pointillés de la figure 13.

Pour une ligne en court-circuit de longueur $\ell = (2n + 1)\,\lambda_0/4$ à la pulsation ω_0, avec une conductance de charge G (fig. 14), on démontre *[45]* que :

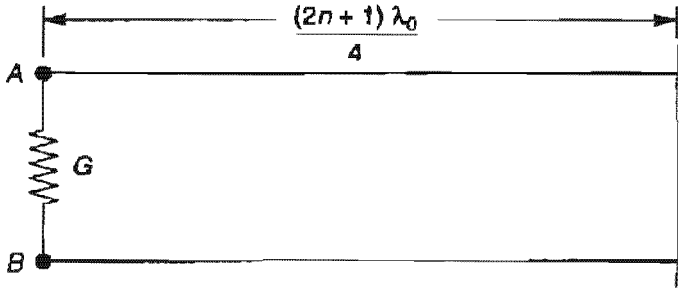


Figure 14.
Ligne quart-d'onde court-circuitée avec conductance de pertes.

$$B = Y_c \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \tag{24}$$

et :

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{Y_c}{4 f_0} \tag{25}$$

Nous voyons qu'au voisinage de la fréquence d'accord, une ligne quart d'onde en court-circuit présente la même variation de susceptance qu'un circuit résonnant parallèle à condition que son admittance caractéristique satisfasse à la relation :

$$Y_c = 8 C f_0 \tag{26}$$

Notons toutefois que cette variation est une courbe en cotangente (en trait gras sur la figure 13) alors qu'avec un circuit résonnant il s'agissait de la courbe en pointillés. La représentation d'un circuit résonnant parallèle par une ligne quart-d'onde en court-circuit ne sera donc valable qu'autant que les courbes de variation de la susceptance peuvent être confondues avec leur tangente commune, soit en pratique dans une bande relative de quelques pour cent.

b) Considérons maintenant le circuit résonnant série de la figure 15, dont R est la résistance de pertes et Q le coefficient de surtension en charge.

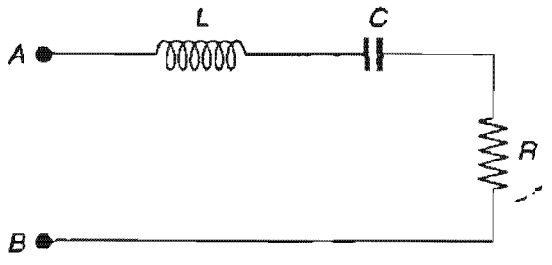


Figure 15.
Circuit résonnant série avec résistance de pertes.

La réactance de ce circuit pour une variation $\Delta\omega$ autour de ω_0 est :

$$X = 2QR \frac{\Delta\omega}{\omega} = 2L\,\omega_0 \frac{\Delta\omega}{\omega} \tag{27}$$

Le taux de variation de la réactance, au voisinage de ω_0, est :

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{2QR}{\omega_0} = 2L \tag{28}$$

Pour une ligne en court-circuit de longueur $\ell = n\,\lambda_0/2$ à la pulsation ω_0, en série avec une résistance de charge R (fig. 16), on démontre (exercice 10.4) que :

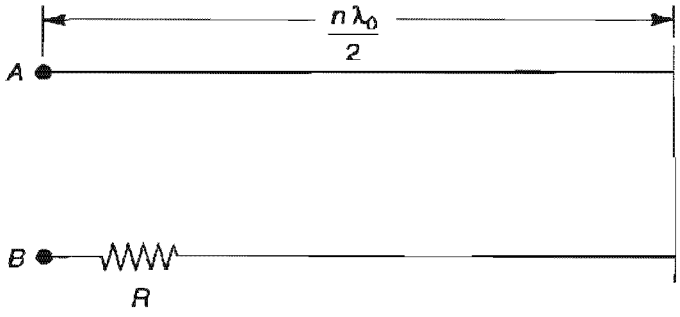


Figure 16. Ligne demi-onde court-circuitée avec résistance de pertes.

$$X = Z_c \pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \qquad (29)$$

et $$\frac{dX}{d\omega} = \frac{Z_c}{2f_0} \qquad (30)$$

NB

Comme au cas précédent, on remarquerait que cette équivalence n'est valable que dans une bande de fréquence réduite à quelques pour cent.

Une ligne demi-onde en court circuit se comporte donc comme un circuit résonnant série, à condition que son impédance caractéristique satisfasse à la relation :

$$Z_c = 4Lf_0 \qquad (31)$$

10.5 RÉALISATION DES IMPÉDANCES PAR DES ÉLÉMENTS À CONSTANTES LOCALISÉES

Aux fréquences inférieures à 3 GHz, les éléments passifs à constantes semi-localisées que nous venons d'étudier, nécessitent beaucoup plus de place que les composants actifs. Il est donc normal de chercher à élaborer des composants passifs à constantes localisées dont les dimensions doivent être beaucoup plus petites que la longueur d'onde ($< \lambda/10$) afin de ne présenter que des variations de phase négligeables. Vers les fréquences supérieures, la limite d'utilisation des éléments localisés dépend des possibilités offertes par les techniques de miniaturisation. En 1996, la frontière semble s'établir vers les 30 GHz.

La bibliographie relative aux éléments localisés (*lumped elements* en anglais) est assez dispersée. Nous nous sommes référés, pour notre part, au chapitre de synthèse rédigé par Caulton *[47]*. Il fournit, par ailleurs, une importante liste de références où se trouve la démonstration ou la justification des formules approchées ou semi-empiriques que nous donnons dans ce qui suit.

10.5.1 Réalisation des résistances

La résistance d'une bande métallique de longueur ℓ, de largeur w et d'épaisseur t, est donnée par :

$$R = \rho \frac{\ell}{wt} \qquad (\rho, \text{résistivité}) \qquad (32)$$

Si l'on considère une bande carrée ($w = \ell$), on notera sa résistance :

$$R_S = \frac{\rho}{t} \qquad (33)$$

Dans le cas d'une bande de cuivre on calcule que :

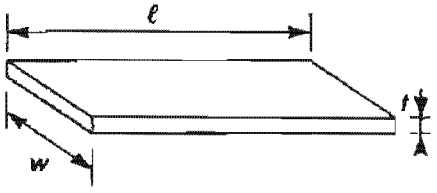
$$R_S = 2{,}61 \cdot 10^{-7} \sqrt{f} \qquad (34)$$

La résistance d'un carré est donc égale à sa résistivité ρ divisée par son épaisseur t ; elle est indépendante des dimensions du carré. Nous exprimerons donc R_S en ohms par carré. Pour calculer la résistance totale d'une bande, nous la considérerons comme une succession de n carrés et sa résistance vaudra donc n fois la résistance d'un carré. Pour réaliser des résistances assez grandes, on peut replier la bande métallique en méandres ; le problème est alors de déterminer le nombre de carrés équivalents à une telle structure.

En fait, une bande métallique n'est équivalente à une résistance pure que si elle se trouve dans un circuit de polarisation, par exemple, découplée par une capacité et donc parcourue par un courant continu. En revanche, si cette bande est utilisée comme résistance de charge d'un amplificateur ou d'un oscillateur, elle se comportera comme une ligne à constantes réparties. Cela signifie qu'elle présentera non seulement une partie réelle résistive dont la valeur est donnée par (32) mais aussi une partie imaginaire inductive dont le comportement est étudié ci-après (§ 10.5.2.a)

10.5.2 Réalisation des inductances

a) Ruban métallique



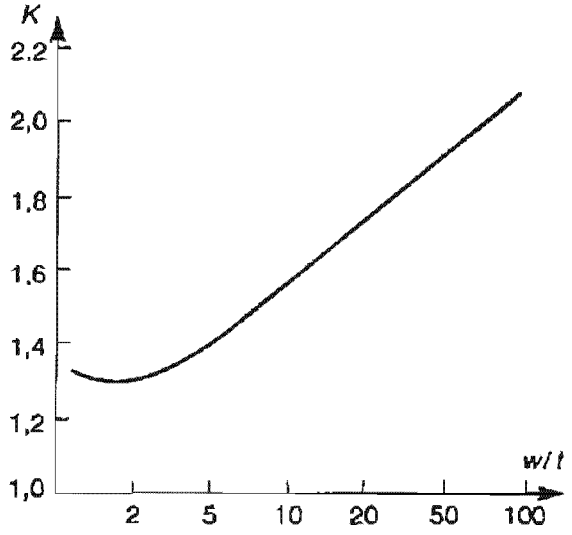


Figure 17. Inductance ruban.

Figure 18. Variation du facteur de correction K de la formule (36).

En espace libre, un ruban métallique de largeur w, de longueur ℓ et d'épaisseur t (fig. 17) présente une inductance par unité de longueur :

$$L\,(\text{nH/cm}) = 2\left(\ln\frac{\ell}{w+t} + 1{,}19 + 0{,}22\,\frac{w+t}{\ell}\right) \qquad (35)$$

En hyperfréquences, cette valeur doit être réduite d'environ 10 % pour tenir compte de l'effet de peau. La résistance par unité de longueur de ce ruban est :

$$R = \frac{K R_S}{2(w+t)} \tag{36}$$

R_S est la résistance superficielle en Ω/carré ; K est un facteur de correction qui tien compte de la coupure des lignes de courant sur les bords du ruban. Il dépend dont de w/t et ses variations sont représentées sur la figure 18.

Dans ces conditions, le coefficient de surtension présenté par un ruban de cuivre (pour lequel $R_S = 2{,}61 \cdot 10^{-7}\sqrt{f}$) est :

$$Q_{Cu} = 4{,}81 \cdot 10^2 \sqrt{f}\, L\,(\text{nH/cm})\, \frac{w}{K} \tag{37}$$

Pour un métal de résistivité ρ et en normalisant les fréquences à 2 GHz, on démontre que le coefficient de surtension est :

$$Q = 2{,}15 \cdot 10^3\, L\,(\text{nH/cm})\, \frac{w}{K} \left| \frac{\rho\,(\text{Cu})}{\rho} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{f(\text{GHz})}{2} \right|^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

b) Inductance boucle

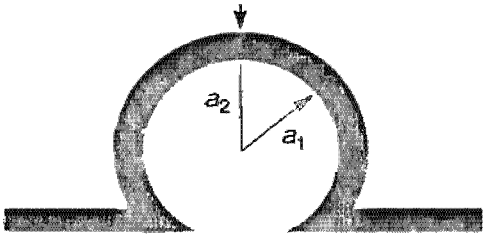


Figure 19. Inductance boucle.

L'inductance boucle, qui présente un encombrement plus réduit que la bande, a la forme d'un omega majuscule. Soit $a = (a_1 + a_2)/2$ son rayon moyen, w sa largeur et t son épaisseur.

$$L\,(\text{nH/cm}) = 2\left(\ln \frac{\ell}{w+t} - 1{,}76\right) \tag{39}$$

ℓ est la longueur de la circonférence de la boucle.

Lorsqu'elle est presque refermée, nous prendrons : $\ell = 2\pi a$.

c) Inductance spirale

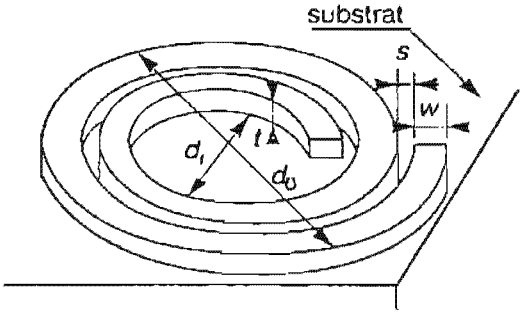


Figure 20. Inductance spirale.

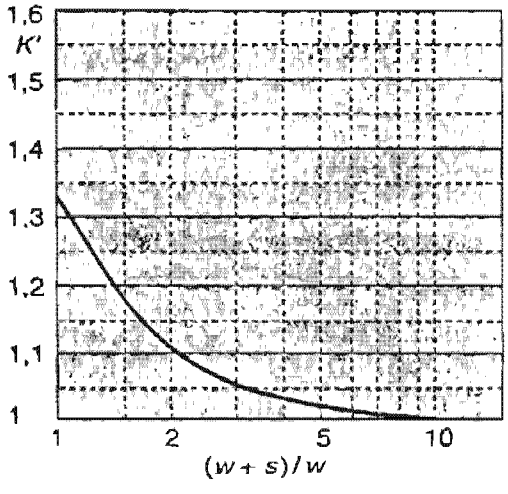


Figure 21. Variation du facteur de correction K' de la formule (41).

Les inductances obtenues avec une bande ou une boucle sont de l'ordre du nanoHenry et leurs coefficients de surtension peuvent être de l'ordre de 100, ou plus, pour des rapports $\ell/w < 10$. Pour avoir des inductances plus importantes, il faut prendre des longueurs ℓ plus grandes, ce qui conduit à utiliser des spirales comportant un nombre n de spires.

Pour une spirale à n spires, dont les paramètres géométriques sont indiqués sur la figure 20, une expression approchée de l'inductance est :

$$L\,(\text{nH}) = 393\,\frac{a^2\,n^2}{8a + 11c} \qquad (40)$$

avec : $\quad a = \dfrac{d_o + d_i}{4}\,(\text{cm}) \quad \text{et} \quad c = \dfrac{d_o - d_i}{2}\,(\text{cm})$

Cette expression est valable dans l'approximation BF et si : $d_o > 1{,}2\,d_i$; $n > 1$ et $t >$ trois épaisseurs de peau.

La résistance de la spirale est :

$$R = K'\pi\,na\,\frac{R_S}{w} \qquad (41)$$

R_S est la résistance superficielle en Ω/carré ; K' est un facteur de correction permettant de tenir compte des couplages entre deux spires voisines. La figure 21 montre la variation de ce facteur en fonction du rapport $(s + w)/w$.

Dans ces conditions, le coefficient de surtension de la spirale est :

$$Q_S = 2 \cdot 10^9 f L\,\frac{w}{K'\,R_S}\,[L\,(8a + 11c)]^{-\frac{1}{2}} \qquad (42)$$

Une autre approximation, due à Bryan *[48]* et valable si $n \simeq 10$ est :

$$L\,(\text{nH}) = 21{,}5a\,n^{1{,}5}\,\ln\frac{8a}{c} \quad (a \text{ est en cm}) \qquad (43)$$

Il est possible d'obtenir des inductances plus grandes sur une même surface en utilisant des « spirales » carrées. Bryan a donné une expression approchée de leur inductance :

$$L\,(\text{nH}) = 0{,}24\,b_{\text{cm}}\,n^{5/3}\,\ln\frac{8b}{c} \qquad (44)$$

où b (qui remplace le a des formules de la spirale circulaire) est la dimension moyenne d'un demi-côté du carré.
Cette relation peut aussi être utilisée sous une autre forme, en faisant intervenir la surface S de la spirale carrée :

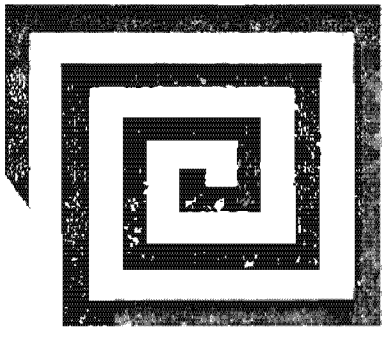


Figure 22. Inductance « spirale carrée ».

$$L\,(\text{nH}) = 8{,}5\,n^{5/3}\,S^{1/2} \quad (S \text{ est en cm}^2) \qquad (45)$$

d) Domaine de validité des formules des inductances

Toutes les valeurs de L qui ont été données dans ce paragraphe ne sont valables que si les métallisations formant les inductances peuvent être considérées comme isolées dans l'espace. Or, ces métallisations sont réalisées sur des lignes microbandes comportant un plan de masse sur la face du diélectrique opposée à la métallisation. On démontre *[47, p. 159-160]* que la condition précitée n'est remplie que si le produit de $\sqrt{\varepsilon_r}$ par l'impédance caractéristique de la ligne a une valeur au moins égale à 300 Ω.

10.5.3 Réalisation des condensateurs

a) Condensateurs en « pavé »

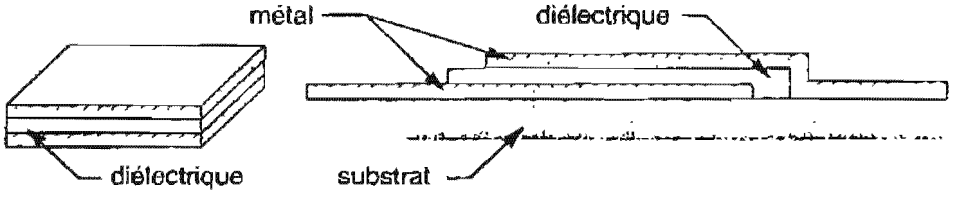


Figure 23. Représentations tridimensionnelle et en coupe d'un condensateur en pavé.

Ces condensateurs se présentent sous la forme d'un parallélépipède rectangle en diélectrique dont les faces supérieure et inférieure sont recouvertes de métallisation. Pour un pavé de surface S, d'épaisseur d et de constante diélectrique relative ε_r, la capacité est :

$$C\,(\text{pF}) = 8{,}84\,\frac{\varepsilon_r S}{d} \tag{46}$$

La résistance des plaques métalliques du condensateur est :

$$\frac{2}{3}\,R_S\,\frac{\ell}{w} \quad (R_S, \text{ résistance superficielle en } \Omega/\text{carré}) \tag{47}$$

Il lui correspond un coefficient de surtension :

$$Q_m = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\omega C R_S}\cdot\frac{w}{\ell} \tag{48}$$

La conductance due aux pertes dans le diélectrique est :

$$\frac{1}{Q_d}\cdot\frac{1}{C\omega\ell} \tag{49}$$

où $Q_d = 1/\text{tg}\,\delta$ est le coefficient de surtension diélectrique et δ est l'angle de pertes du diélectrique. Notons que tg δ est à peu près constant pour les diélectriques utilisés en hyperfréquences.

Le coefficient de surtension global du condensateur est donc :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_d} \tag{50}$$

Exemple

De tels condensateurs utilisent souvent du diélectrique en silice ($Si\ O_2$) dont la constante diélectrique relative ε_r vaut 2,25. Pour $S = 1$ mm^2 et $d = 10$ µ, nous obtenons une capacité de 2 pF.

b) Condensateurs à structure interdigitale

Ces capacités interdigitales sont une structure plane (fig. 24) de N minces bandes conductrices parallèles, de longueur ℓ, reliées alternativement à l'une ou l'autre des deux bandes, de longueur w, qui leur sont perpendiculaires. Le tout est déposé sur la surface d'un substrat qui est souvent de l'alumine ($\varepsilon_r \cong 10$). Alley *[49]* a calculé sa capacité :

$$C\,(\text{pF}) = \frac{\varepsilon_r + 1}{w}\,\ell\,\left|(N-3)\,A_1 + A_2\right| \tag{51}$$

$$A_1\,(\text{pF}) = 8{,}85 \cdot 10^{-2}\,w\,(\text{cm}) \quad \text{et} \quad A_2\,(\text{pF}) = 9{,}92 \cdot 10^{-2}\,w\,(\text{cm}).$$

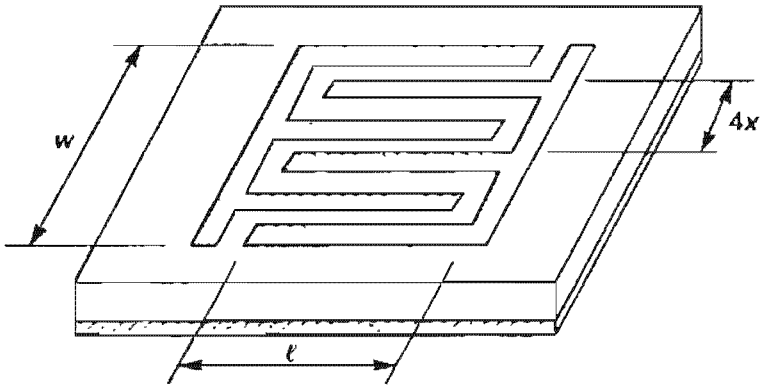


Figure 24. Condensateur à structure interdigitale.

Les valeurs couramment obtenues sont de l'ordre de 0,1 à 15 pF.

NB

Ces formules ne sont valables que si l'épaisseur du diélectrique est suffisamment importante (> 1 mm) par rapport à l'espacement des doigts (qui est de l'ordre de 10 à 100 µm). Quant à l'épaisseur de la métallisation, elle n'a qu'une importance secondaire.

La résistance d'un tel condensateur est :

$$R = \frac{4}{3} \cdot \frac{\ell}{XN} R_S \tag{52}$$

Son coefficient de surtension est donné par :

$$Q_c = \frac{1}{\omega CR} \tag{53}$$

Des coefficients de plusieurs centaines peuvent être obtenus à des fréquences de quelques GHz pour des condensateurs de quelques pF.

2e partie

GUIDES D'ONDES ET CAVITÉS

Chapitre 11

Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques

11.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réflexion d'une onde électromagnétique (O.E.M.) sur une plan conducteur ainsi que la réflexion et la réfraction d'une O.E.M. sur une interface entre deux milieux diélectriques. Ces phénomènes physiques sont, en effet, à la base des études que nous effectuerons dans les chapitres suivants au sujet de la propagation des ondes en guides d'ondes métalliques et diélectriques.

Nous demandons au lecteur d'admettre les quelques propriétés suivantes d'une O.E.M., qui seront démontrées dans le chapitre 6 « Propagation des O.E.M. en espace libre » du second volume de cet ouvrage.

1) Une O.E.M. est constituée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$ qui forment un trièdre direct avec la direction de propagation ; soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de cette direction, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{H} \wedge \vec{u} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (1)$$

ou

$$\vec{H} = \vec{u} \wedge \vec{E} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \qquad (2)$$

ε et μ sont la permittivité et la perméabilité magnétique du milieu où s'effectue la propagation. Dans le cas de l'air ou du vide :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ (F/m)} \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (H/m)}$$

D'autre part, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ forment un plan perpendiculaire à la direction de propagation que l'on appelle le plan d'onde.

2) L'équation de propagation en espace libre diélectrique, selon une direction Oz, des champs électrique et magnétique, pris en valeurs instantanées complexes $\vec{\underline{e}}(z, t)$ et $\vec{\underline{h}}(z, t)$ est :

$$\frac{\partial^2 \vec{\underline{e}} \text{ ou } \vec{\underline{h}}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{\underline{e}} \text{ ou } \vec{\underline{h}}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

En régime sinusoïdal, ces équations admettent des solutions de la forme :

$$\vec{\underline{e}}(z, t) = \vec{\underline{E}}(z)\, e^{j\omega t} \qquad (4)$$

$\underline{E}(z)$ est l'amplitude complexe :

$$\underline{E}(z) = E_0\, e^{-j\omega \frac{z}{v}} = E_0\, e^{-jkz} \qquad (5)$$

où

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (6)$$

est la vitesse de propagation de l'onde

et

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (7)$$

est le paramètre de phase de l'onde.

De même :

$$\vec{\underline{h}}(z, t) = \vec{\underline{H}}(z)\, e^{j\omega t} \qquad (8)$$

avec :

$$\underline{H}(z) = H_0\, e^{-j\omega \frac{z}{v}} = H_0\, e^{-jkz} \qquad (9)$$

Le rapport des modules de $\underline{E}$ et $\underline{H}$ s'exprime en ohms :

$$\frac{E}{H} = \frac{E_0}{H_0} = \zeta \qquad (10)$$

Il est appelé impédance d'onde et a pour valeur :

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (11)$$

Dans l'air ou dans le vide :

$$\zeta = \zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\ \Omega \qquad (12)$$

3) Les conditions aux limites à l'interface diélectrique-conducteur sont :

– la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ est nulle :

$$E_T = 0 \qquad (13)$$

- la composante normale du champ $\vec{H}$ est nulle :

$$H_N = 0 \qquad (14)$$

Les conditions aux limites à l'interface entre deux milieux diélectriques parfaits 1 et 2 sont :

- continuité des composantes tangentielles des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, soit :

$$E_{T,1} = E_{T,2} \qquad (15)$$

et

$$H_{T,1} = H_{T,2} \qquad (16)$$

- continuité des composantes normales des vecteurs $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, soit :

$$\varepsilon_1 E_{N,1} = \varepsilon_2 E_{N,2} \qquad (17)$$

et

$$\mu_1 H_{N,1} = \mu_2 H_{N,2} \qquad (18)$$

11.2 RÉFLEXION SUR UN PLAN CONDUCTEUR SOUS INCIDENCE NORMALE

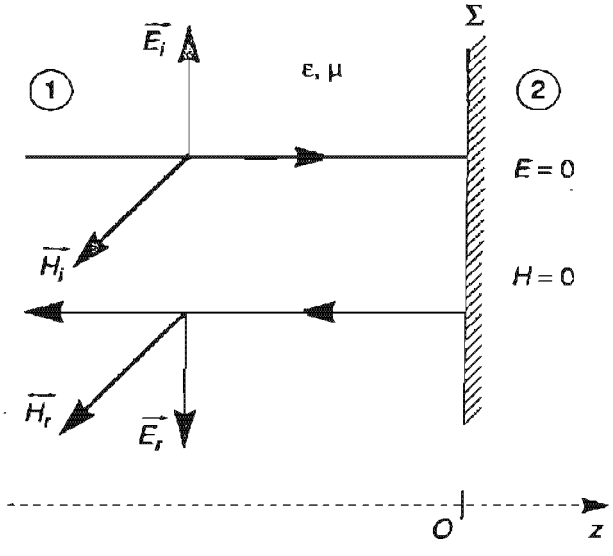


Figure 1. Réflexion sous incidence normale.

11.2.1 Réflexion à la surface d'un conducteur parfait

Le milieu (1) est un diélectrique caractérisé par ε et μ dans lequel se propagent l'onde plane incidente ($\vec{E_i}$, $\vec{H_i}$) et l'onde plane réfléchie ($\vec{E_r}$, $\vec{H_r}$). Le milieu (2)

est un conducteur parfait à l'intérieur duquel le champ électromagnétique est nul. Σ est l'interface entre ces deux milieux (fig. 1).

La direction de propagation de l'onde incidente étant normale à la surface Σ, un plan d'onde quelconque de cette onde est parallèle à Σ et il en est de même pour $\vec{E}_i$ et $\vec{H}_i$. Si nous prenons un axe de référence Oz parallèle à la direction de propagation (fig. 1), $\vec{E}_i$ et $\vec{H}_i$ sont donnés, en valeurs instantanées complexes par :

$$\underline{\vec{e}}_i(z, t) = \vec{E}_i \, e^{j(\omega t - kz)} \tag{19}$$

$$\underline{\vec{h}}_i(z, t) = \vec{H}_i \, e^{j(\omega t - kz)} \tag{20}$$

$$\frac{E_i}{H_i} = \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \text{impédance d'onde du milieu (1)}$$

Cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie ($\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$) qui se propage perpendiculairement à Σ. L'expression des champs $\vec{E}_r$ et $\vec{H}_r$ est donnée, en valeurs instantanées complexes, par :

$$\underline{\vec{e}}_r(z, t) = \vec{E}_r \, e^{j(\omega t + kz)} \tag{21}$$

$$\underline{\vec{h}}_r(z, t) = \vec{H}_r \, e^{j(\omega t + kz)} \tag{22}$$

Le trièdre formé par les vecteurs ($\vec{E}_i$, $\vec{H}_i$, $\vec{z}$) ainsi que celui formé par les vecteurs ($\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$, $-\vec{z}$) doivent être directs. Il en résulte donc que :

$$\frac{E_i}{H_i} = -\frac{E_r}{H_r} = \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{23}$$

($\vec{E}_i$, $\vec{H}_i$) et ($\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$) sont aussi liés par les conditions aux limites imposées par le plan conducteur Σ : $E_T = 0$ et $H_N = 0$. Les champs incidents et réfléchis étant parallèles à Σ, il n'y a pas de composantes normales et la seule condition que l'on doit écrire est : $\vec{E}_i + \vec{E}_r = 0$

soit :

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i \tag{24}$$

Il résulte enfin de (23) et (24) que :

$$\vec{H}_r = \vec{H}_i \tag{25}$$

Si l'on se donne le champ $\vec{E}_i$, l'orientation de $\vec{H}_i$ résulte de l'application de la règle du trièdre direct et celles de $\vec{E}_r$ et $\vec{H}_r$ résultent des relations (24) et (25).

L'état électromagnétique en un point d'abscisse z du diélectrique résulte de la superposition des champs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\underline{\vec{e}}(z,t) = \vec{E}_i e^{j(\omega t - kz)} + \vec{E}_r e^{j(\omega t + kz)}$$
$$= \vec{E}_i \left(e^{-jkz} - e^{jkz}\right) e^{j\omega t} = -2j\,\vec{E}_i \sin kz\, e^{j\omega t} \quad (26)$$

$$\underline{\vec{h}}(z,t) = \vec{H}_i e^{j(\omega t - kz)} + \vec{H}_r e^{j(\omega t + kz)}$$
$$= \vec{H}_i \left(e^{-jkz} + e^{jkz}\right) e^{j\omega t} = 2\,\vec{H}_i \cos kz\, e^{j\omega t} \quad (27)$$

Comme (26) peut encore s'écrire :

$$\underline{\vec{e}}(z,t) = 2\,\vec{E}_i \cos\left(kz - \frac{\pi}{2}\right) e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (28)$$

nous constatons que les champs électrique et magnétique sont constamment en quadrature dans le temps et dans l'espace. Cela signifie qu'il existe dans le milieu diélectrique un régime d'ondes stationnaires :

- dans le plan Σ ($z = 0$) et dans tous les plans situés à $n\,\lambda/2$ de Σ, le champ électrique est nul et le champ magnétique est maximal ou minimal ;
- dans tous les plans situés à $(2n + 1)\,\lambda/4$, c'est le contraire : le champ électrique est maximal ou minimal et le champ magnétique est nul.

Remarquons enfin que les problèmes de polarisation ne présentent pas de difficulté dans ce cas de l'incidence normale puisque les champs électrique et magnétique gardent une polarisation uniforme en tous points de l'espace.

11.2.2 Réflexion à la surface d'un conducteur imparfait

D'après le paragraphe précédent, les amplitudes complexes des champs ($\vec{E}$ //Ox et $\vec{H}$ //Oy) des ondes incidente et réfléchie se propageant dans le diélectrique, sont données par :

$$\underline{E}_{ix} = \underline{E}_i e^{-jkz} \quad (29)$$

$$\underline{H}_{iy} = \zeta_d^{-1}\,\underline{E}_{ix} \quad (30)$$

$$\underline{E}_{rx} = \underline{E}_r e^{jkz} \quad (31)$$

$$\underline{H}_{ry} = -\zeta_d^{-1}\,\underline{E}_{rx} \quad (32)$$

$\zeta_d = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ est l'impédance d'onde du diélectrique.

Puisque le conducteur n'est pas parfait, la réflexion n'est pas totale et il y a une onde transmise de la forme :

$$\underline{E}_{tx} = \underline{E}_t e^{-\gamma z} \quad (33)$$

$$\underline{H}_{ty} = \zeta_c^{-1}\,\underline{E}_{tx} \tag{34}$$

ζ_c est l'impédance d'onde du conducteur imparfait.

Comme la réflexion et la transmission s'effectuent sur une interface avec un milieu imparfait, nous avons pris $\underline{E}_i$, $\underline{E}_r$ et $\underline{E}_t$ complexes.

Nous démontrons au chapitre 6 du second volume « Propagation des O.E.M. en espace libre » que le paramètre de propagation $\gamma = \alpha + j\beta$ dans un milieu conducteur imparfait est tel que :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi\mu\sigma f} = \frac{1}{\delta} \tag{35}$$

D'autre part, l'impédance d'onde de ce milieu est donnée par :

$$\underline{\zeta}_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\; e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{36}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\underline{E}_{tx} = \underline{E}_t\, e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \tag{37}$$

$$\underline{H}_{ty} = \underline{E}_t \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\; e^{-j\frac{\pi}{4}}\, e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \tag{38}$$

Les équations de continuité des composantes tangentielles de $\underline{E}$ et $\underline{H}$ pour $z = 0$, nous donnent :

$$\underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \tag{39}$$

$$\zeta_d^{-1}\,(\underline{E}_i - \underline{E}_r) = \underline{E}_t\,\underline{\zeta}_c^{-1} \tag{40}$$

d'où :

$$\frac{\underline{E}_i + \underline{E}_r}{\underline{E}_i - \underline{E}_r} = \frac{\underline{\zeta}_c}{\zeta_d} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}}\; e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{41}$$

et :

$$\frac{1+\underline{R}}{1-\underline{R}} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2\sigma}}\,(1+j) = \underline{K} \tag{42}$$

Le coefficient de réflexion complexe est donc donné par :

$$\underline{R} = \frac{\underline{K}-1}{\underline{K}+1} = \frac{\underline{\zeta}_c - \zeta_d}{\underline{\zeta}_c + \zeta_d} \tag{43}$$

11.3 RÉFLEXION SUR UN PLAN CONDUCTEUR SOUS INCIDENCE OBLIQUE

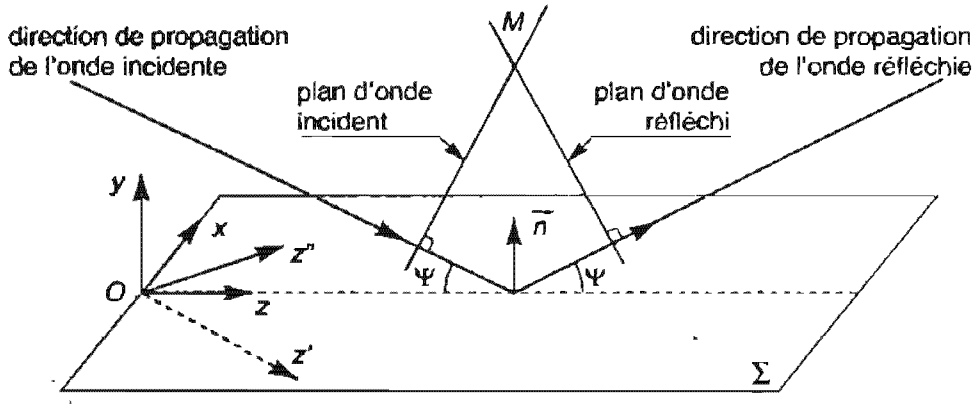


Figure 2. Réflexion sous incidence oblique – Géométrie du problème.

11.3.1 Position du problème

Pour traiter cette question, nous choisirons un trièdre de référence $Oxyz$ tel que yOz coïncide avec le plan d'incidence et xOz avec le plan conducteur. Le plan d'incidence de l'onde est le plan défini par la direction d'incidence de l'onde et la normale à Σ (fig. 2).

Considérons une onde incidente plane dont la direction de propagation fait l'angle ψ avec la surface plane Σ du milieu conducteur. Cette onde va donner naissance à une onde réfléchie dont la direction de propagation fait aussi l'angle ψ avec Σ.

L'état électromagnétique en un point quelconque du diélectrique résulte de la superposition de l'onde incidente (O.I.) et de l'onde réfléchie (O.R.). Pour trouver cet état, il nous faut déterminer l'expression mathématique des champs correspondant aux ondes incidente et réfléchie :

- pour l'étude de l'onde incidente, nous rapporterons la figure à un système d'axes $Oxy'z'$ dans lequel Oz' est parallèle à la direction de cette onde ;
- pour l'étude de l'onde réfléchie, nous rapporterons la figure à un système d'axes $Oxy''z''$ dans lequel Oz'' est parallèle à la direction de cette onde.

Nous nous ramènerons ensuite au système d'axes $Oxyz$ grâce aux formules de changement d'axes :

$$z' = -y \sin \psi + z \cos \psi \quad ; \quad z'' = y \sin \psi + z \cos \psi$$

Dans ces conditions :

- l'amplitude complexe de l'une des composantes de l'O.I. est de la forme :

$$\underline{A}_i = A\, e^{-jkz'} = A\, e^{jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \qquad (44)$$

- l'amplitude complexe de l'une des composantes de l'O.R. est de la forme :

$$\underline{A}_r = A\, e^{-jkz''} = A\, e^{-jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \qquad (45)$$

A représente l'amplitude à l'origine de la composante du champ E ou H considérée.

Ces expressions ne nous donnent que l'amplitude et la phase des champs : reste le problème de la polarisation. Il est particulièrement intéressant de traiter les deux cas fondamentaux de polarisation suivants :

- champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence (et alors le champ magnétique se trouve dans le plan d'incidence) → c'est le cas T.E. ;
- champ magnétique perpendiculaire au plan d'incidence (et alors le champ électrique se trouve dans le plan d'incidence) → c'est le cas T.M.

Il y deux raisons à cela :

- d'une part, un champ électrique (ou magnétique) ayant une polarisation quelconque peut toujours se décomposer en une composante perpendiculaire au plan d'incidence et une composante dans le plan d'incidence ;
- d'autre part, si le champ incident $\vec{E}_i$ (ou $\vec{H}_i$) est perpendiculaire au plan d'incidence, le champ réfléchi $\vec{E}_r$ (ou $\vec{H}_r$) est lui aussi perpendiculaire au plan d'incidence. Le champ total électrique (ou magnétique) a donc une polarisation uniforme dans tout l'espace.

C'est en fait une démarche qui est très générale pour traiter tous les problèmes de réflexion, réfraction ou diffraction des ondes : plutôt que de résoudre ces problèmes dans un cas de polarisation quelconque, ce qui nécessiterait des calculs très lourds et dont la signification physique serait difficile à saisir, on préfère les résoudre dans les deux cas fondamentaux de polarisation. Un cas de polarisation quelconque peut ensuite être traité très facilement en superposant de façon appropriée, les résultats obtenus dans les deux cas fondamentaux de polarisation.

11.3.2 $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan d'incidence (cas TE)

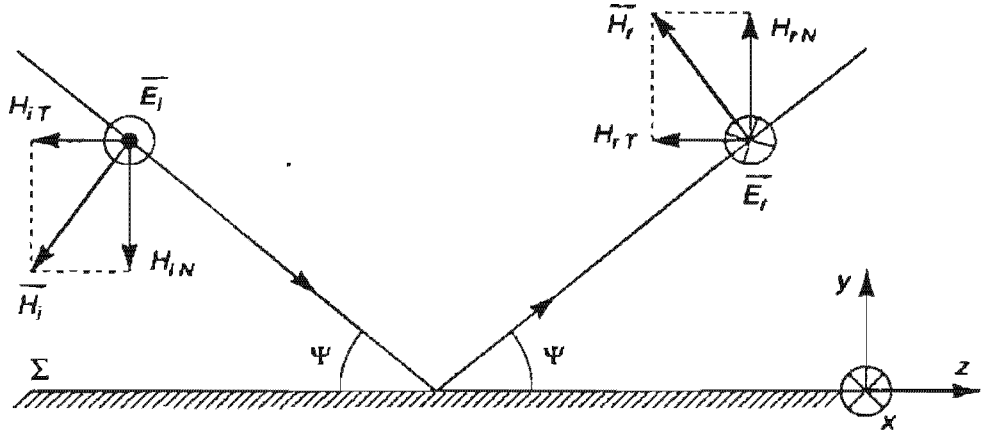


Figure 3.
Champ $\vec{E}$ perpendiculaire au plan de la figure : ⊙ dirigé de l'arrière vers l'avant ; ⊗ dirigé de l'avant vers l'arrière.

a) Onde incidente

Prenons $\vec{E}_i$ dirigé d'arrière en avant du plan de la figure 3. Comme le trièdre formé par $\vec{E}_i$, $\vec{H}_i$ et la direction de propagation doit être direct, $\vec{H}_i$ est dirigé vers le bas ; il a donc :

- une composante normale à la surface Σ : H_{iN}
- une composante tangentielle à la surface Σ : H_{iT}

Les expressions de ces champs en amplitudes complexes sont :

$$\underline{E}_{ix} = -E\,e^{jky\sin\psi}\,e^{-jkz\cos\psi} \tag{46}$$

$$\underline{H}_{iy} = -H\cos\psi\,e^{jky\sin\psi}\,e^{-jkz\cos\psi} \tag{47}$$

$$\underline{H}_{iz} = -H\sin\psi\,e^{jky\sin\psi}\,e^{-jkz\cos\psi} \tag{48}$$

E et H représentent les amplitudes prises à l'origine du champ électrique et du champ magnétique de l'onde incidente. Leur rapport E/H est l'impédance d'onde du milieu diélectrique.

Si le milieu est un diélectrique sans perte, les champs $\vec{\mathrm{E}}$ et $\vec{\mathrm{H}}$ sont en phase. Dans ces conditions, les amplitudes E et H dans les relations (46) à (48) sont réelles et l'impédance d'onde est une quantité réelle. C'est le cas que nous considérons dans ce paragraphe.

Mais si le milieu était un diélectrique avec pertes, son impédance d'onde serait complexe et il faudrait alors considérer que les amplitudes $\underline{\mathrm{E}}$ et $\underline{\mathrm{H}}$ sont des quantités complexes si bien que les champs correspondants $\vec{\mathrm{E}}$ et $\vec{\mathrm{H}}$ ne sont pas en phase.

b) Onde réfléchie

Dans l'onde réfléchie, compte tenu des conditions de continuité, le champ électrique reste perpendiculaire au plan d'incidence yOz et il n'a donc qu'une seule composante selon x ; le champ magnétique reste dans le plan d'incidence où il a deux composantes, l'une selon y et l'autre selon z. Avant de donner les amplitudes complexes $\underline{E}_{rx}$, $\underline{H}_{ry}$ et $\underline{H}_{rz}$ de ces composantes, nous devons déterminer l'orientation des champs réfléchis.

Celle du champ $\vec{E}_r$ s'obtient en écrivant la condition aux limites qui est imposée sur Σ au champ électrique tangentiel $\vec{E}_T = 0$, soit ici : $\vec{E}_i + \vec{E}_r = 0$, puisque les champs $\vec{E}_i$ et $\vec{E}_r$ sont parallèles à Σ. $\vec{E}_r$ est donc dirigé de l'avant vers l'arrière de la figure 3 et puisque le trièdre formé par $\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$ et la direction de propagation, doit être direct, $\vec{H}_r$ est dirigé vers le haut.

Les amplitudes complexes des composantes du champ réfléchi s'écrivent donc :

$$\underline{E}_{rx} = E\,e^{-jky\sin\psi}\,e^{-jkz\cos\psi} \tag{49}$$

$$\underline{H}_{ry} = H\cos\psi\,e^{-jky\sin\psi}\,e^{-jkz\cos\psi} \tag{50}$$

$$\underline{H}_{rz} = -H\sin\psi\,e^{-jky\sin\psi}\,e^{-jkz\cos\psi} \tag{51}$$

c) Champ total

En un point quelconque du diélectrique, l'état électromagnétique résulte de la superposition de ces deux ondes incidente et réfléchie. Les amplitudes complexes des composantes des champs résultants sont :

$$\underline{E}_x = -2\mathrm{j}\, E \sin(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \tag{52}$$

$$\underline{H}_y = -2\mathrm{j}\, H \cos\psi \sin(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \tag{53}$$

$$\underline{H}_z = -2\, H \sin\psi \cos(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \tag{54}$$

Il est maintenant possible de savoir dans quel sens se propage l'énergie, en calculant les trois composantes du vecteur de Poynting : $\vec{\underline{P}} = \frac{1}{2}\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{H}}^*$

$$\underline{P}_x = \frac{1}{2}(\underline{E}_y \underline{H}_z^* - \underline{E}_z \underline{H}_y^*) = 0 \tag{55}$$

Il n'y a pas de puissance transportée selon la direction Ox.

$$\underline{P}_y = \frac{1}{2}(\underline{E}_z \underline{H}_x^* - \underline{E}_x \underline{H}_z^*) = -\frac{1}{2}\underline{E}_x \underline{H}_z^* \tag{56}$$

$$\underline{P}_y = -2\mathrm{j}\, EH \sin\psi \sin(ky \sin\psi)\cos(ky \sin\psi) \tag{57}$$

Cette expression est imaginaire pure : la puissance qui se propage selon la direction Oy est de la puissance réactive.

$$\underline{P}_z = \frac{1}{2}(\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*) = \frac{1}{2}\underline{E}_x \underline{H}_y^* \tag{58}$$

$$\underline{P}_z = 2\, EH \cos\psi \sin^2(ky \sin\psi) \tag{59}$$

Cette expression est réelle : la puissance qui se propage selon la direction Oz est de la puissance active.

La propagation est donc caractérisée par l'existence d'un régime d'ondes stationnaires pures dans une direction perpendiculaire à Σ et d'un régime d'ondes progressives dans la direction Oz. Dans une direction quelconque, on observerait un régime d'ondes semi-stationnaires.

Enfin, il est intéressant de déterminer l'impédance d'onde dans la direction Oz de propagation de la puissance active. Il s'agit de la composante ζ_z de cette impédance qui est le rapport des composantes de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ perpendiculaires à Oz :

$$\zeta_z = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \frac{E}{H\cos\psi} \tag{60}$$

ce que nous écrirons :

$$\zeta_{TE} = \frac{\zeta}{\cos\psi} \tag{61}$$

11.3.3 $\vec{H}$ est perpendiculaire au plan d'incidence (cas TM)

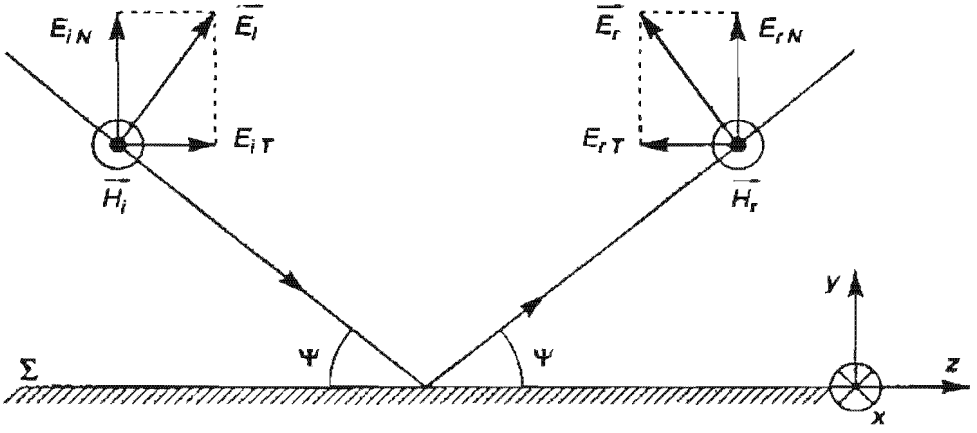


Figure 4.
Champ $\vec{H}$ perpendiculaire au plan de la figure : ⊙ dirigé de l'arrière vers l'avant ; ⊗ de l'avant vers l'arrière.

a) Onde incidente

Prenons $\vec{H}_i$ dirigé d'arrière en avant du plan de la figure 4. $\vec{E}_i$, qui est dans le plan de la figure, est donc dirigé vers le haut et il a :

- une composante normale à la surface Σ : E_{iN}
- une composante tangentielle à la surface Σ : E_{iT}

Les expressions de ces champs, en amplitudes complexe, sont :

$$\underline{H}_{ix} = -H\, e^{jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \qquad (62)$$

$$\underline{E}_{iy} = E \cos \psi\, e^{jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \qquad (63)$$

$$\underline{E}_{iz} = E \sin \psi\, e^{jky \sin \varphi}\, e^{-jkz \cos \psi} \qquad (64)$$

Même remarque pour E et H qu'au paragraphe 11.3.2.a.

b) Onde réfléchie

Dans l'onde réfléchie, compte tenu des conditions de continuité, le champ magnétique reste perpendiculaire au plan d'incidence et le champ électrique reste dans le plan d'incidence où il a deux composantes, l'une selon y et l'autre selon z. Avant de donner les amplitudes complexes $\underline{H}_{rx}$, $\underline{E}_{ry}$ et $\underline{E}_{rz}$ de ces composantes, nous devons déterminer l'orientation des champs réfléchis.

$\vec{H}_i$ et $\vec{H}_r$ étant parallèles à la surface Σ, nous ne pouvons rien dire sur l'orientation de $\vec{H}_r$, par rapport à celle de $\vec{H}_i$, puisque la condition de continuité du champ magnétique total à la surface de Σ ($\vec{H}_N = 0$) porte sur la composante normale. Ce que nous savons, en revanche, c'est que : $\vec{E}_{iT} + \vec{E}_{rT} = 0$ sur Σ.

Cette condition nous montre que $\vec{E}_{rT} = -\vec{E}_{iT}$ et permet de déterminer $\vec{E}_r$ qui doit être perpendiculaire à la direction de l'onde réfléchie, d'une façon unique : $\vec{E}_r$ est dirigé vers le haut de la figure. Il en résulte donc que $\vec{H}_r = \vec{H}_i$. Par conséquent, les amplitudes complexes des champs réfléchis s'écrivent :

$$\underline{H}_{rx} = -H\, e^{-jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \quad (65)$$

$$\underline{E}_{ry} = E \cos \psi\, e^{-jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \quad (66)$$

$$\underline{E}_{rz} = -E \sin \psi\, e^{-jky \sin \psi}\, e^{-jkz \cos \psi} \quad (67)$$

c) Champ total

Les amplitudes complexes des champs résultant de la superposition des composantes de ces deux ondes sont :

$$\underline{H}_x = -2H \cos (ky \sin \psi)\, e^{-jkz \cos \psi} \quad (68)$$

$$\underline{E}_y = 2E \cos \psi \cos (ky \sin \psi)\, e^{-jkz \cos \psi} \quad (69)$$

$$\underline{E}_z = 2j\, E \sin \psi \sin (ky \sin \psi)\, e^{-jkz \cos \psi} \quad (70)$$

Par un calcul tout à fait analogue à celui effectué dans le cas précédent, à partir des composantes du vecteur de Poynting complexe, nous démontrerions que $\underline{P}_x$ est nulle, $\underline{P}_y$ est imaginaire pure et $\underline{P}_z$ réelle. Cela signifie qu'il n'y a propagation de puissance active que selon Oz et amène aux mêmes conclusions que dans le cas T.E. quant à la nature des régimes d'ondes s'établissant dans le diélectrique.

L'impédance d'onde dans la direction Oz est donnée par le quotient de $\underline{E}_y$ par $\underline{H}_x$; comme l'ordre des opérations est effectué en sens inverse de la permutation circulaire directe sur (x, y, z) nous devons affecter ce quotient d'un signe moins :

$$\zeta_z = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{E}{H} \cos \psi \quad (71)$$

ce que nous écrirons :

$$\zeta_{TM} = \zeta \cos \psi \quad (72)$$

11.4 RÉFLEXION ET TRANSMISSION À L'INTERFACE DE DEUX DIÉLECTRIQUES

Nous nous proposons de déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T à la surface de séparation de deux milieux diélectriques. Comme pour l'étude de la réflexion sur un plan conducteur, nous nous placerons dans les deux cas fondamentaux de polarisation : les cas T.E. (T.M.) dans lesquels le champ $E(H)$ est perpendiculaire au plan d'incidence.

Nous ne ferons aucune hypothèse préliminaire sur l'orientation relative des champs incidents, réfléchis et transmis. En effet, si nous avons toujours le droit de donner une orientation à $\vec{E}_i$ (et, par conséquent, à $\vec{H}_i$), nous ne savons rien quant à celles de $\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$, $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$, puisque ce sont précisément les signes de R et T qui vont nous les donner.

11.4.1 Le champ *E* est perpendiculaire au plan d'incidence (Cas TE)

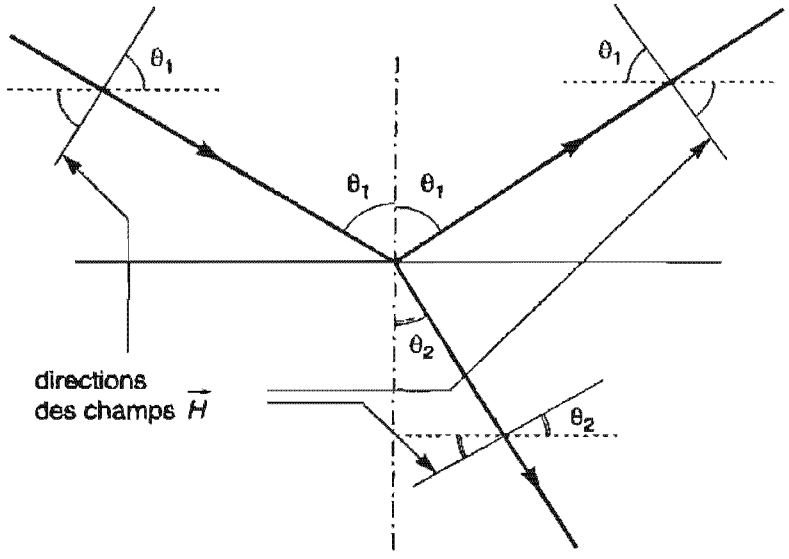


Figure 5.
Les champs $\vec{E}$ sont perpendiculaires au plan de la figure.

Nous allons écrire les conditions de continuité des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à la surface de séparation de deux milieux diélectriques. Comme elles s'appliquent aux composantes tangentielles des champs, il est important de remarquer que, dans ce cas de polarisation (fig. 5) :

- les champs électriques sont tangentiels à Σ
- les composantes tangentielles des champs magnétiques sont en cos θ.

En passant immédiatement aux amplitudes complexes, nous avons :

$$\begin{cases} \underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t & (73) \\ (\underline{H}_i + \underline{H}_r)\cos\theta_1 = \underline{H}_t \cos\theta_2 & (74) \end{cases}$$

Comme : $$\frac{\underline{E}_i}{\underline{H}_i} = \zeta_1, \quad \frac{\underline{E}_r}{\underline{H}_r} = -\zeta_1, \quad \frac{\underline{E}_t}{\underline{H}_t} = \zeta_2$$

il vient :

$$\begin{cases} \underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t & (75) \\ \underline{E}_i - \underline{E}_r = \underline{E}_t \, \dfrac{\zeta_1}{\zeta_2} \cdot \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} & (76) \end{cases}$$

$(75)/\underline{E}_i \quad \rightarrow \quad 1 + R_{E_\perp} = T_{E_\perp}$ (77)

$(75) + (76) \quad \rightarrow \quad 2\,\underline{E}_i = \underline{E}_t \left(1 + \dfrac{\zeta_1 \cos\theta_2}{\zeta_2 \cos\theta_1} \right)$ (78)

et : $$\underline{E}_t = 2\,\underline{E}_i \; \frac{\zeta_2 \cos\theta_1}{\zeta_1 \cos\theta_2 + \zeta_2 \cos\theta_1}$$

d'où : $$\boxed{T_{E_\perp} = \frac{2\,\zeta_2 \cos\theta_1}{\zeta_2 \cos\theta_1 + \zeta_1 \cos\theta_2}} \quad (79)$$

D'après (77) : $$R_{E_\perp} = T_{E_\perp} - 1$$

d'où : $$\boxed{R_{E_\perp} = \frac{\zeta_2 \cos\theta_1 - \zeta_1 \cos\theta_2}{\zeta_2 \cos\theta_1 + \zeta_1 \cos\theta_2}} \quad (80)$$

Remarque

Puisque $(\underline{H}_r/\underline{H}_i) = -(\underline{E}_r/\underline{E}_i)$, *il suffit de changer de signe le coefficient de réflexion relatif au champ* E *pour obtenir le coefficient de réflexion relatif au champ* H :

$$R_{H_\perp} = -R_{E_\perp} \quad (81)$$

En ce qui concerne le coefficient de transmission,

$$\frac{\underline{H}_t}{\underline{H}_i} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_i} \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

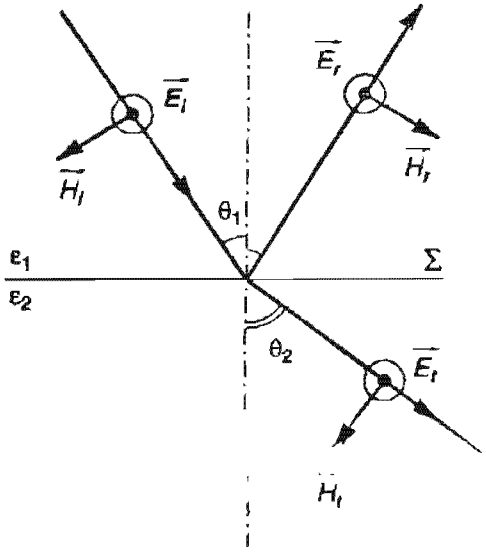
Donc : $$T_{H_\perp} = T_{E_\perp} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \quad (82)$$

En général, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Donc : $\zeta_1 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}$ et $\zeta_2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2}$. Les formules (80) et (79) deviennent alors, après multiplication du numérateur et du dénominateur par $\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$, puis simplifications :

$$\boxed{R_{E_\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}} \quad (83)$$

$$\boxed{T_{E_\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}} \quad (84)$$

Nous voyons tout de suite que si $T_{E_\perp}$ est toujours positif, par contre $R_{E_\perp}$ peut, selon les valeurs respectives de $\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1$ et $\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2$, être positif ou négatif. D'où les deux cas de figure 6 et 7, en prenant pour hypothèse que E_i est dirigé de l'arrière vers l'avant.



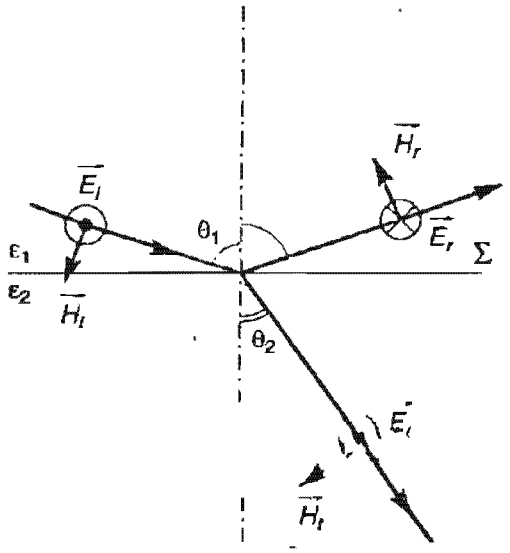


Figure 6.
Cas où $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$
alors $\theta_1 < \theta_2$
$\Rightarrow \cos\theta_1 > \cos\theta_2$.

Figure 7.
Cas où $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$
alors $\theta_1 > \theta_2$
$\Rightarrow \cos\theta_1 < \cos\theta_2$.

⊙ Champ dirigé de l'arrière vers l'avant ; ⊗ Champ dirigé de l'avant vers l'arrière.

11.4.2 Le champ $\vec{H}$ est perpendiculaire au plan d'incidence (Cas TM)

Remarquons tout d'abord que, dans ce cas de polarisation (fig. 8) :

- les champs magnétiques sont tangentiels à Σ,
- les composantes tangentielles des champs électriques sont en cos θ.

En passant immédiatement aux amplitudes complexes, les conditions de continuité des composantes tangentielles s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{H}_i + \underline{H}_r = \underline{H}_t & (85) \\ (\underline{E}_i + \underline{E}_r)\cos\theta_1 = \underline{E}_t \cos\theta_2 & (86) \end{cases}$$

Compte tenu de : $\dfrac{\underline{E}_i}{\underline{H}_i} = -\dfrac{\underline{E}_r}{\underline{H}_r} = \zeta_1$, et de $\dfrac{\underline{E}_t}{\underline{H}_t} = \zeta_2$:

$$\begin{cases} \underline{E}_i - \underline{E}_r = \dfrac{\zeta_1}{\zeta_2}\underline{E}_t & (87) \\ \underline{E}_i + \underline{E}_r = \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}\underline{E}_t & (88) \end{cases}$$

$$(87)/\underline{E}_i \quad \rightarrow \quad 1 - R_{E_{//}} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} T_{E_{//}} \tag{89}$$

$$(87) + (88) \quad \rightarrow \quad 2\,\underline{E}_i = \underline{E}_t \left[\frac{\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \right] \tag{90}$$

et :
$$2\,\underline{E}_i = \underline{E}_t \frac{\zeta_1 \cos\theta_1 + \zeta_2 \cos\theta_2}{\zeta_2 \cos\theta_1}$$

d'où :
$$\boxed{T_{E_{//}} = \frac{2\,\zeta_2 \cos\theta_1}{\zeta_1 \cos\theta_1 + \zeta_2 \cos\theta_2}} \tag{91}$$

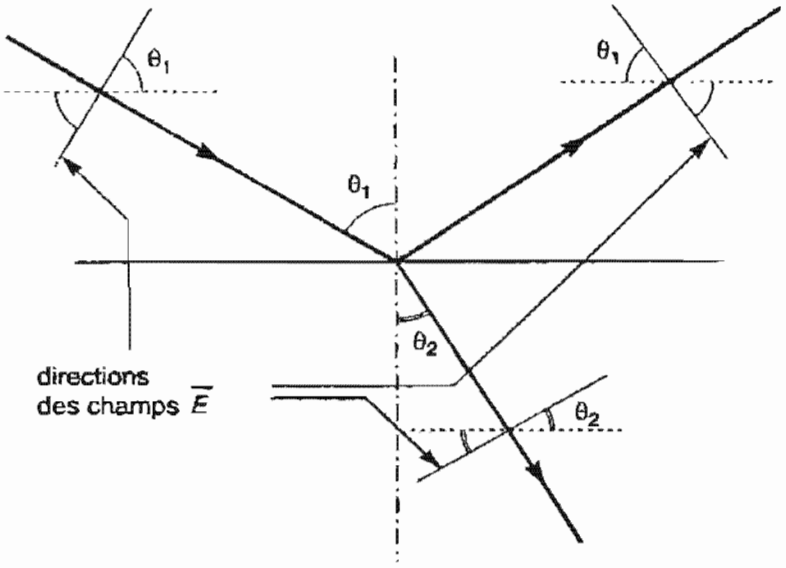


Figure 8.
Les champs $\vec{H}$ sont perpendiculaires au plan de la figure.

D'après (89) :
$$R_{E_{//}} = 1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} T_{E_{//}}$$

d'où :
$$\boxed{R_{E_{//}} = \frac{\zeta_2 \cos\theta_2 - \zeta_1 \cos\theta_1}{\zeta_1 \cos\theta_1 + \zeta_2 \cos\theta_2}} \tag{92}$$

Remarque

Nous avons, comme dans le cas précédent :

$$R_{H_{//}} = -R_{E_{//}} \tag{93}$$

et
$$T_{H_{//}} = T_{E_{//}} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \tag{94}$$

Dans le cas général où $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\zeta_1 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}$, $\zeta_2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2}$ et l'on obtient enfin :

$$R_{E_{//}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2} \qquad (95)$$

$$T_{E_{//}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2} \qquad (96)$$

Dans ce cas également, $T_{E_{//}}$ est constamment positif alors que $R_{E_{//}}$ peut être positif ou négatif selon les valeurs respectives de $\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2$ et $\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1$.

Pour chacun des deux cas de figure 9 et 10, nous avons supposé que H_i est dirigé de l'arrière vers l'avant.

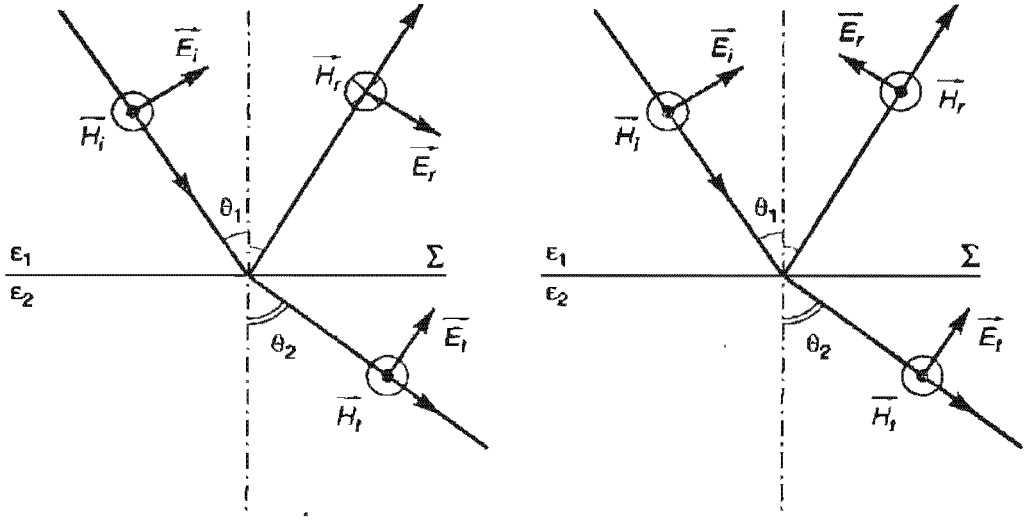


Figure 9. $\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2 > \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1$

Figure 10. $\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2 < \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1$

⊙ Champ dirigé de l'arrière vers l'avant ; ⊗ champ dirigé de l'avant vers l'arrière.

11.4.3 Étude des variations des coefficients de réflexion

L'étude de ces variations est particulièrement intéressante car elle va nous permettre de préciser dans quels cas ils peuvent être positifs ou négatifs et dans quelles conditions il peut y avoir réflexion totale ou, au contraire, réflexion nulle. Nous allons effectuer cette étude en utilisant les coefficients relatifs au champ électrique que nous noterons désormais $R_\perp$ et $R_{//}$ pour plus de simplicité.

Nous voyons immédiatement d'après la loi de Descartes

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2 \qquad (97)$$

que si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\theta_1 < \theta_2$ et que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $\theta_1 > \theta_2$.

a) Cas où $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ (fig. 11)

Les intervalles de variation de θ_1 et θ_2 sont : $0 \le \theta_1 \le \pi/2$ et $0 \le \theta_2 \le \theta_{2L}$.

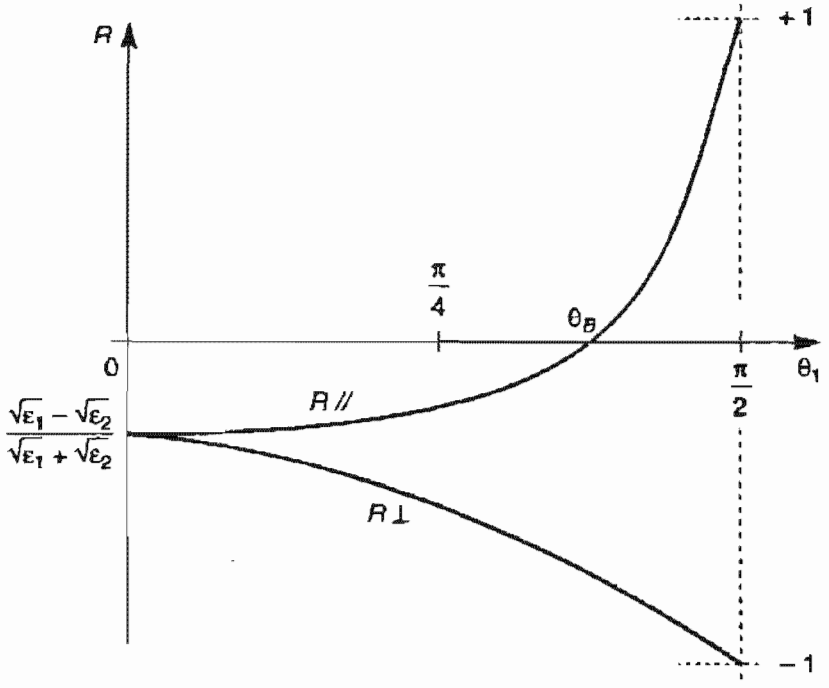


Figure 11. Variations des coefficients $R_{//}$ et $R_{\perp}$ si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

L'angle θ_2 limite est défini par :

$$\sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon_2}\,\sin\theta_{2L} \tag{98}$$

Donc :

$$\theta_{2L} = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{99}$$

Voyons quelles sont les valeurs de $R_{\perp}$ et $R_{//}$ pour les valeurs extrêmes de θ_1 :

- Si $\theta_1 = \theta_2 = 0 \rightarrow$ $$R_{\perp} = R_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \tag{100}$$

 Les deux coefficients de réflexion sont égaux et négatifs.

- Si $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \theta_{2L} \rightarrow$ $R_{\perp} = -1$ et $R_{//} = +1$.
 Il y a réflexion totale avec changement de signe lorsque E_i est perpendiculaire au plan d'incidence et sans changement de signe lorsque E_i est dans le plan d'incidence.

b) Cas où $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (fig. 12)

Les intervalles de variation de θ_1 et θ_2 sont : $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1L}$ et $0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$.

L'angle θ_1 limite est donné par :

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,\sin\theta_{1L} = \sqrt{\varepsilon_2} \tag{101}$$

Donc : $$\theta_{1L} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad (102)$$

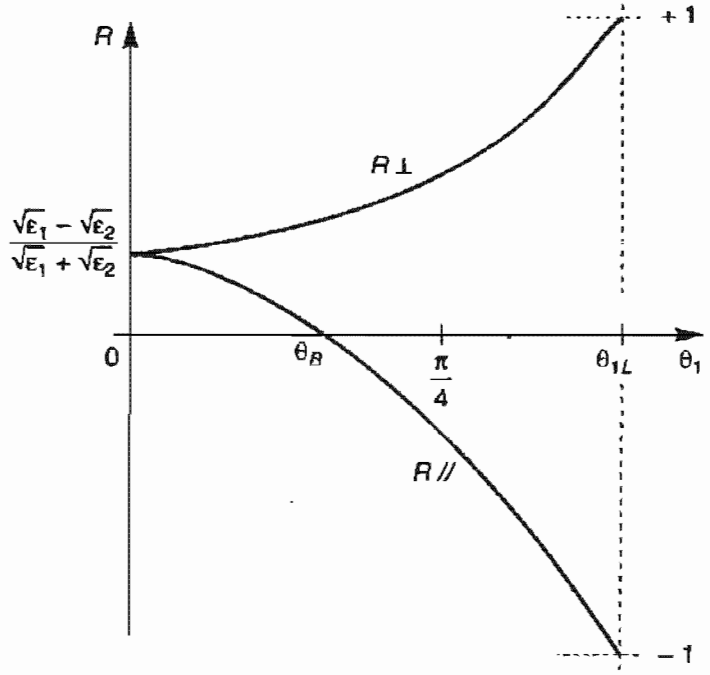


Figure 12.
Variation des coefficients $R_{//}$ et $R_\perp$ si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Voyons quelles sont les valeurs de $R_\perp$ et $R_{//}$ pour les valeurs extrêmes de θ_1 :

- Si $\theta_1 = \theta_2 = 0 \rightarrow$ $$R_\perp = R_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \qquad (103)$$

 Les deux coefficients de réflexion sont égaux et positifs.

- Si $\theta_1 = \theta_{1L}$ et $\theta_2 = \pi/2 \rightarrow \quad R_\perp = 1$ et $R_{//} = -1$.

 Il y a réflexion totale sans changement de signe lorsque E_i est perpendiculaire au plan d'incidence et avec changement de signe lorsque E_i est dans le plan d'incidence.

c) Réfraction totale

Dans l'un et l'autre cas qui viennent d'être étudiés, $R_\perp$ reste négatif (si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) ou positif (si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) tandis que $R_{//}$ change de signe et s'annule pour une valeur θ_B de θ_1 qui est calculée (si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ou $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) d'après :

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_B = \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2 \\ \sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_B = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2 \end{cases}$$

En faisant le produit de ces deux équations, nous trouvons que $\sin 2\theta_B = \sin 2\theta_2$, ce qui ne peut être vérifié ici que si $\theta_B = (\pi/2) - \theta_2$. Dans ces conditions : $\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_B = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_B$

d'où $$\operatorname{tg}\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad \text{et} \quad \theta_B = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{104}$$

Cet angle θ_B est appelé angle de Brewster et l'incidence correspondante, incidence « brewsterienne ». Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $\theta_B > 45°$ (fig. 11) et si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\theta_B < 45°$ (fig. 12). Il y a alors réfraction totale, en polarisation parallèle.

d) Réflexion totale

Dans un système d'axes de référence *Oxyz* ayant l'axe des *x* parallèle à l'interface Σ et l'axe des z perpendiculaire à Σ dirigé vers le bas (fig. 13), les champs électriques de l'onde incidente dans le milieu 1 et de l'onde transmise dans le milieu 2 s'écrivent, en amplitudes complexes :

$$\underline{E_i} = E\, e^{-j\, k_1 x \sin\theta_1}\, e^{-j\, k_1 z \cos\theta_1} \tag{105}$$

$$\underline{E_t} = \underline{T}\, E\, e^{-j\, k_2 x \sin\theta_2}\, e^{-j\, k_2 z \cos\theta_2} \tag{106}$$

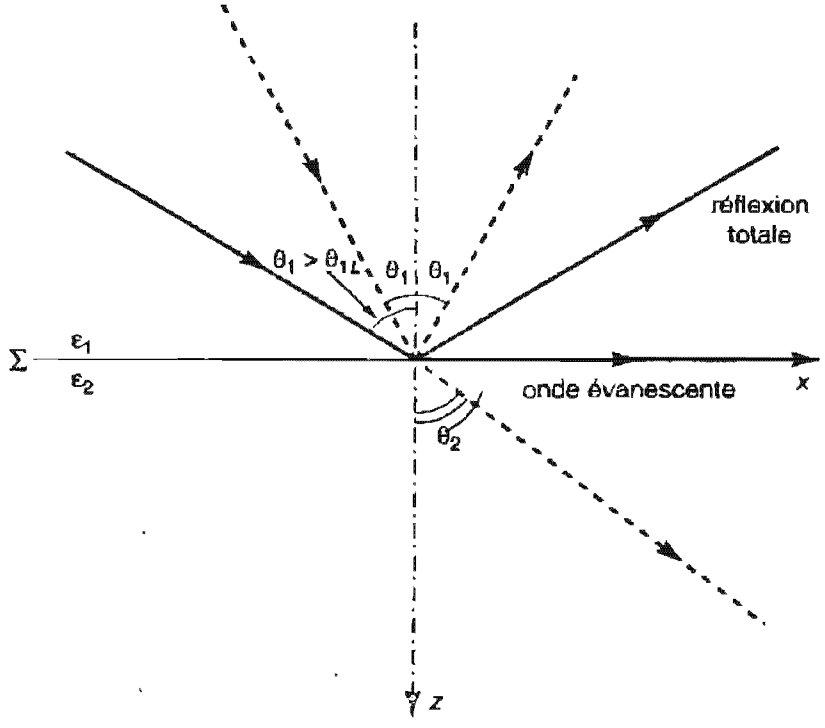


Figure 13. Interface entre deux milieux de permittivités $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

– ➤ –

Cas où $\theta_1 < \theta_{1L}$

➤

Cas où $\theta_1 > \theta_{1L}$

D'après la loi de Descartes : $\sin\theta_2 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\, \sin\theta_1$. Si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, nous avons vu qu'il y avait réflexion totale pour $\theta_{1L} = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$.

Si $\theta_1 > \theta_{1L}$, $\sin\theta_2 > 1$. Dans ces conditions, $\cos\theta_2$ est imaginaire pur :

$$\cos\theta_2 = \pm j\sqrt{\sin^2\theta_2 - 1} \tag{107}$$

L'expression (106) de l'onde transmise s'écrit alors :

$$\underline{E}_t = \underline{T} E \, e^{\pm k_2 z \sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1}} \, e^{-j k_2 x \sin \theta_2} \qquad (108)$$

Seul le signe moins correspond à une onde ayant une signification physique : il s'agit d'une onde qui se propage le long de l'interface Σ entre les deux milieux (fig. 13), puisque la variation de phase n'a lieu que selon l'axe des x, et dont l'amplitude diminue exponentiellement lorsque l'on s'écarte de l'interface selon l'axe des z. *L'onde qui existe dans le milieu 2 est donc une onde évanescente.*

Compte tenu de la valeur de $\cos \theta_2 = -j \sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1}$ les coefficients de réflexion $R_\perp$ et $R_{//}$, calculés d'après (83) et (95) sont complexes. Le champ réfléchi a donc un déphasage par rapport au champ incident, qui dépend de la polarisation utilisée. Il en résulte qu'une onde incidente à polarisation rectiligne, non située dans le plan d'incidence, va se transformer, après réflexion totale, en une onde réfléchie à polarisation elliptique puisque les composantes parallèle et perpendiculaire de cette onde, sont déphasées l'une par rapport à l'autre.

11.4.4 Réfraction d'une onde dans un diélectrique à pertes

Nous nous intéressons au cas où l'onde provenant d'un milieu sans perte, de permittivité ε_1, se réfracte dans un milieu à pertes, de permittivité ε_2 complexe. Dans ce cas, nous écrirons la loi de Descartes sous la forme :

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r} \sin \theta'_2 \qquad (109)$$

avec :

$$\underline{\varepsilon}_r = \frac{\underline{\varepsilon}_2}{\varepsilon_1} = \varepsilon'_r - j \varepsilon''_r \qquad (110)$$

$\sin \theta'_2$ est une quantité complexe et θ'_2 ne représente pas l'angle de réfraction θ_2, c'est pourquoi nous l'avons noté θ'_2.

Dans le cas où le milieu 2 était sans perte, nous avons déjà vu que l'expression de l'onde réfractée pouvait s'écrire, en amplitude complexe :

$$\underline{E}_t = \underline{A} \, e^{-j k_2 (x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)} \qquad (111)$$

avec :

$$k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}} = k_1 \sqrt{\varepsilon_r} \qquad (112)$$

où :

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad (113)$$

Dans le cas où le milieu 2 a des pertes, nous pouvons donc écrire l'expression du champ réfracté sous la forme :

$$\underline{E}_t = \underline{A} \, e^{-j k_1 \sqrt{\underline{\varepsilon}_r} (x \sin \theta'_2 + z \cos \theta'_2)} \qquad (114)$$

Dans cette expression, $\sqrt{\underline{\varepsilon}_r}\,\sin\theta'_2 = \sin\theta_1$ est réel, et :

$$\sqrt{\underline{\varepsilon}_r}\,\cos\theta'_2 = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r}\,\sqrt{1-\sin^2\theta'_2} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r - \sin^2\theta_1} \qquad (115)$$

est complexe, de la forme $p - \mathrm{j}\,q$, avec :

$$p = \frac{1}{2}\left|\sqrt{(\varepsilon'_r - \sin^2\theta_1)^2 + \varepsilon''^2_r} + (\varepsilon'_r - \sin^2\theta_1)\right|^{\frac{1}{2}} \qquad (116)$$

$$q = \frac{1}{2}\left|\sqrt{(\varepsilon'_r - \sin^2\theta_1)^2 + \varepsilon''^2_r} - (\varepsilon'_r - \sin^2\theta_1)\right|^{\frac{1}{2}} \qquad (117)$$

Avec ces notations, l'expression du champ réfracté dans le milieu 2 peut s'écrire :

$$\underline{E}_t = \underline{A}\,e^{-\mathrm{j}\,k_1 x \sin\theta_1}\,e^{-\mathrm{j}\,k_1 z\,(p-\mathrm{j}\,q)}$$

$$\underline{E}_t = \underline{A}\,e^{-k_1 qz}\,e^{-\mathrm{j}\,k_1\,(x\sin\theta_1 + pz)} \qquad (118)$$

Les plans équiphases de l'onde réfractée sont définis par :

$$x\sin\theta_1 + pz = \text{cte} \qquad (119)$$

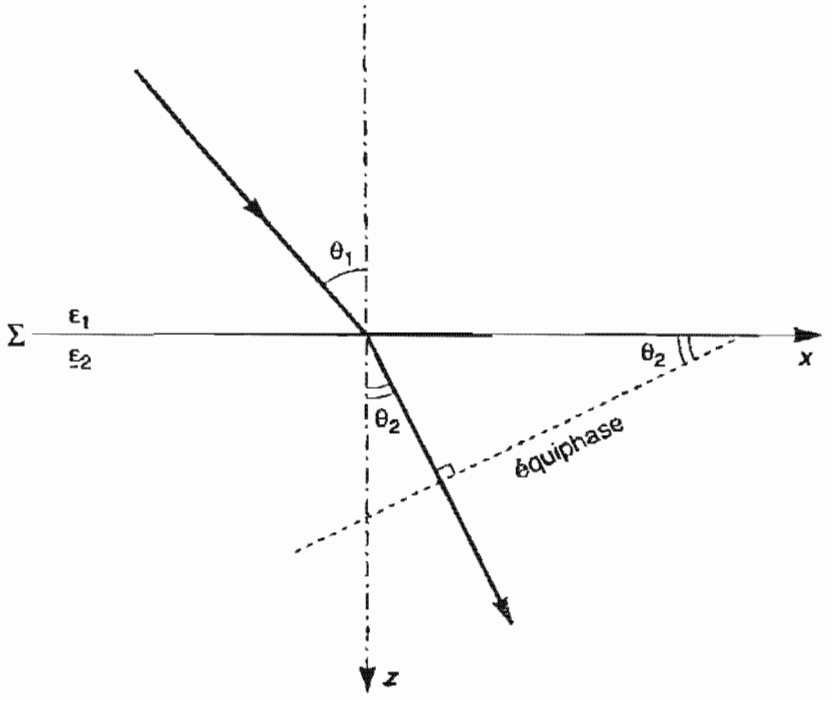


Figure 14. Réfraction d'une onde dans un diélectrique à pertes.

Ces plans font avec la surface de séparation entre les deux milieux, un angle θ_2 identique à celui de la direction de l'onde réfractée avec la normale à l'interface (fig. 14).

Pour calculer cet angle, différentions la relation (119) : $(\sin\theta_1)\,dx + p\,dz = 0$.

D'où :

$$\mathrm{tg}\,\theta_2 = \left|\frac{dz}{dx}\right| = \frac{\sin\theta_1}{p} \qquad (120)$$

L'angle de réfraction étant ainsi déterminé, il est possible de définir une permittivité réelle équivalente ε_2^{eq}, pour le milieu à pertes, telle que :

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2^{eq}}\sin\theta_2 \qquad (121)$$

Cette permittivité est celle d'un milieu sans perte qui produirait la même réfraction que le milieu à pertes considéré. L'analogie doit s'arrêter là car, dans un milieu sans perte, les surfaces équiphases sont également équiamplitudes tandis que dans le milieu à pertes, la relation (118) montre qu'il y a une variation de l'amplitude en $e^{-k_1 qz}$.

EXERCICES

EXERCICE 11.1

(Paragraphe 11.2.2 – Réflexion à la surface d'un conducteur imparfait)

L'eau de mer est caractérisée par une conductivité $\sigma = 3$ (S · m^{-1}) et une permittivité relative $\varepsilon_r = 70$.

1) Lorsque $\sigma/\omega\ \varepsilon_0\ \varepsilon_r > 10$, on peut considérer que l'eau de mer se comporte comme un conducteur imparfait. À partir de quelle fréquence cette propriété est-elle vraie ?

2) À la fréquence de 10 MHz, calculer la valeur du coefficient de réflexion à l'interface air-conducteur dans le cas d'une incidence normale.

EXERCICE 11.2

(Paragraphe 11.3 – Réflexion sur un plan conducteur sous incidence oblique)

Soit une onde qui se réfléchit sur un plan conducteur sous une incidence de 45°. Le milieu diélectrique étant de l'air, calculer les impédances d'onde dans les cas T.E. et T.M.

EXERCICE 11.3

(Paragraphe 11.4 – Réflexion et transmission à l'interface de deux diélectriques)

Le sol moyennement sec est caractérisé par une conductivité $\sigma = 10^{-3}$ (S · m^{-1}) et une permittivité relative $\varepsilon_r = 15$, c'est-à-dire par une permittivité complexe $\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\ \sigma/\omega$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0\ \varepsilon_r$.

1) Lorsque $\sigma/\omega\ \varepsilon_0\ \varepsilon_r < 1/10$, on peut considérer que le sol se comporte comme un diélectrique à pertes. À partir de quelle fréquence cette propriété est-elle vraie ?

2) À la fréquence de 1 GHz, calculez le coefficient de réflexion à l'interface air (milieu 1) – sol (milieu 2) pour un angle d'incidence de 60° par rapport à la normale, dans les deux cas de polarisation.

EXERCICE 11.4

(Paragraphe 11.4 – Réflexion et transmission à l'interface de deux diélectriques)

De part et d'autre d'une interface Σ entre deux milieux diélectriques, nous avons :

- une onde incidente ($\vec{E}_i$, $\vec{H}_i$) selon la direction $\vec{u}_i$;
- une onde réfléchie ($\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$) selon la direction $\vec{u}_r$;
- une onde transmise ($\vec{E}_t$, $\vec{H}_t$) selon la direction $\vec{u}_t$

1) À partir des vecteurs de Poynting de chacune de ces ondes, écrire la relation qui traduit la conservation de la puissance.

2) Par projection sur un axe des z perpendiculaire à l'interface Σ, en déduire la relation

qu'il y a entre les modules des coefficients de réflexion et de transmission.

3) Vérifier que $(R_\perp, T_\perp)$ d'une part et $(R_{//}, T_{//})$ d'autre part satisfont bien cette relation.

Chapitre 12

Les guides d'ondes rectangulaires

12.1 Les divers types de guides d'ondes étudiés

Dans ce chapitre, nous étudierons d'abord le guide d'ondes rectangulaire à parois lisses qui est très utilisé en micro-ondes, notamment en ondes centimétriques et millimétriques, tant pour les techniques de laboratoire que pour le radar ou pour les applications industrielles.

Notre approche de la propagation en guide rectangulaire sera très physique : nous partirons des résultats établis au chapitre précédent pour la réflexion d'une onde sur une plan conducteur et puis nous verrons à quelles conditions, il est possible d'adjoindre un plan parallèle (§ 12.2) et deux autres plans perpendiculaires afin de constituer un guide d'ondes rectangulaire (§ 12.3). Nous mettrons aussi bien en évidence les caractéristiques de la propagation qui s'effectue par réflexions successives sur les parois du guide que les longueurs d'onde de propagation guidée et de coupure (§ 12.4).

Nous étudierons les modes de propagation de types TE_{m0} et TE_{0n}, notamment le mode fondamental pour $m = 1$ ou $n = 1$ (§ 12.5) ainsi que les modes supérieurs (§ 12.6), en ce qui concerne la répartition transversale du champ, la puissance transportée, le calcul des dimensions du guide, sa bande passante et son atténuation (§ 12.7 et 8). Nous réserverons l'étude des modes TE_{mn} et TM_{mn} au chapitre suivant.

Après avoir parlé des guides rectangulaires surdimensionnés (§ 12.9) qui sont utilisés en ondes millimétriques, nous nous intéresserons enfin aux guides rectangulaires à nervure (§ 12.10, fig. 11) et aux guides rectangulaires à ailettes (§ 12.11, fig. 13). Ils permettent d'obtenir des bandes passantes plus larges par abaissement de la fréquence de coupure du mode fondamental et leur structure est moins sensible que celle du guide rectangulaire à parois lisses, aux imperfections de fabrication.

12.2 PROPAGATION ENTRE DEUX PLANS PARALLÈLES

12.2.1 Réflexion sur un plan conducteur

Étant donnée une onde électromagnétique (O.E.M.) arrivant obliquement sur un plan conducteur Σ, le champ électromagnétique a été déterminé au chapitre 11 « Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques » dans les deux cas fondamentaux de polarisation. Dans les expressions des champs données par les relations (52, 53, 54, 68, 69, 70) E et H *ne sont déterminés qu'à une constante près* puisque leur valeur numérique exacte dépend de la puissance d'émission de la source qui les rayonne. L'explicitation du facteur 2 n'est donc pas indispensable à l'interprétation de ces relations et nous pouvons remplacer $2E$ par E et $2H$ par H.

Dans ces conditions, les expressions que nous utiliserons dans ce chapitre sont les suivantes (rappelons que $k = 2\pi/\lambda$).

a) Si le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan d'incidence

$$\underline{E}_x = -\mathrm{j}\, E \sin(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \quad (1)$$

$$\underline{H}_y = -\mathrm{j}\, H \cos\psi \sin(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \quad (2)$$

$$\underline{H}_z = -H \sin\psi \cos(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \quad (3)$$

Un tel régime, dans lequel le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation Oz, est appelé un mode Transverse Électrique (TE) ou encore mode H, pour rendre compte du fait que seul le champ magnétique a une composante dans la direction de propagation.

b) Si le champ $\vec{H}$ est perpendiculaire au plan d'incidence

$$\underline{H}_x = -H \cos(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \quad (4)$$

$$\underline{E}_y = E \cos\psi \cos(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \quad (5)$$

$$\underline{E}_z = \mathrm{j}\, E \sin\psi \sin(ky \sin\psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\cos\psi} \quad (6)$$

Ici c'est le champ magnétique qui est perpendiculaire à la direction de propagation et seul le champ électrique a une composante dans cette direction ; c'est pourquoi on parlera de mode Transverse Magnétique (TM) ou mode *E*.

12.2.2 Condition de propagation entre deux plans parallèles

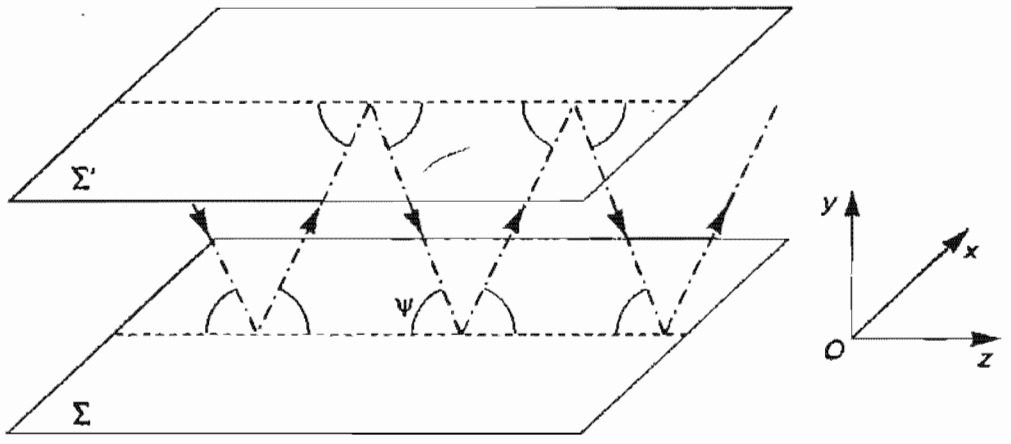


Figure 1.
Notations utilisées pour la propagation entre deux plans parallèles.

Nous ne pourrons introduire un plan Σ' parallèle à Σ (c'est-à-dire à xOz d'après les notations de la figure 1) sans interrompre la propagation que si les conditions de continuité sont vérifiées sur ce plan, à savoir :

$$E_T = 0 \rightarrow E_x = 0 \text{ et } E_z = 0,$$
$$H_N = 0 \rightarrow H_y = 0 \ \forall\, x \text{ et } z.$$

En se reportant aux relations qui donnent $\underline{E}_x$, $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_y$, dans les deux cas fondamentaux de polarisation, ces conditions imposent que : sin (ky sin ψ) = 0 soit $ky \sin \psi = n\pi$.

- Si l'angle d'incidence ψ_0 est donné, nous avons :

$$y = \frac{n\lambda}{2 \sin \psi_0} \qquad (n, \text{ entier} \neq 0) \tag{7}$$

Cette relation nous permet de déterminer les distances auxquelles on doit placer le plan Σ' parallèle à Σ : $\lambda/2 \sin \psi_0$ ou $\lambda/\sin \psi_0$ ou $3\lambda/2 \sin \psi_0$, etc.

- Si la distance entre Σ et Σ' est fixée à une valeur b, il ne pourra y avoir propagation entre Σ et Σ' que si :

$$\sin \psi = \frac{n\lambda}{2b} \tag{8}$$

n devant être tel que : $0 < n\lambda/2b < 1$.

12.2.3 Longueurs d'onde et vitesses de phase

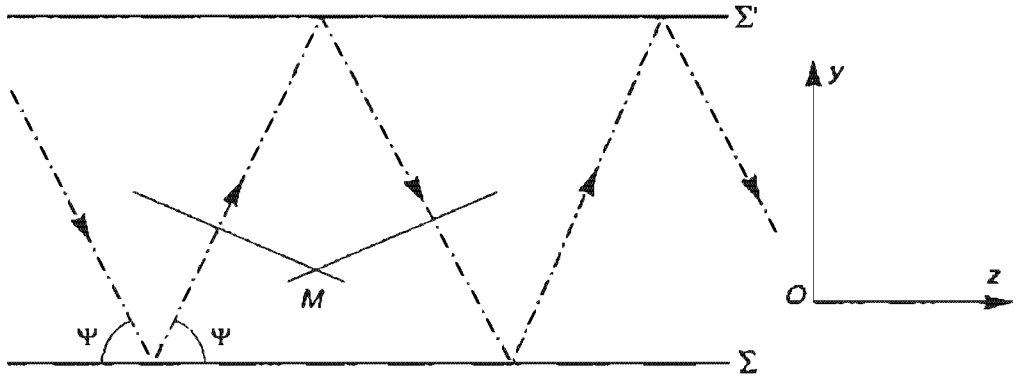


Figure 2. Propagation par réflexions successives sur Σ et Σ'.

La propagation entre deux plans parallèles Σ et Σ' est caractérisée par des réflexions successives sur l'un et l'autre plan. En un point *M* de l'espace diélectrique, l'état électromagnétique résulte de la superposition de deux ondes planes réfléchies également inclinées par rapport à *Oz* (fig. 2). Les expressions des champs en *M* restent données par les relations (1) à (6) pour les deux cas fondamentaux de polarisation.

Rappelons qu'à partir de ces expressions, nous avons démontré (§ 11.3 « Réflexion sur un plan conducteur sous incidence oblique ») que les axes *Oy* et *Oz* correspondent respectivement aux directions de propagation de la puissance réactive et de la puissance active.

D'après la figure 2, nous voyons que les axes de référence *yOz* ne coïncident pas avec la direction de propagation de l'une ou l'autre onde réfléchie. Il en résulte que, selon ces axes, elle semble se propager avec une longueur d'onde et une vitesse différentes de celles qu'elle a suivant la direction de propagation.

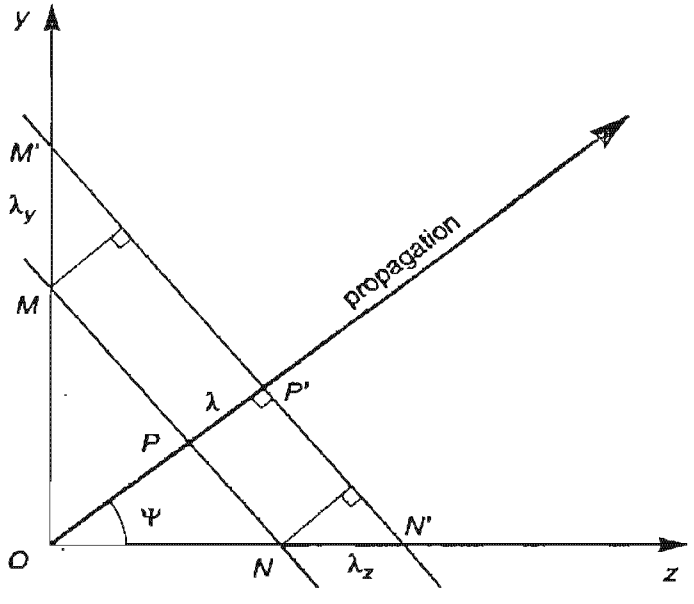


Figure 3. Définition des longueurs d'onde λ, λ_y et λ_z.

Considérons, par exemple (fig. 3) l'onde qui se propage de Σ vers Σ'. Nous pouvons représenter, dans le plan $y0z$, les traces de deux plans d'onde successifs déphasés de 2π ; ce sont deux droites perpendiculaires à la direction de propagation et dont la distance est :

$PP' = \lambda$, longueur d'onde selon la direction de propagation

$$MM' = \lambda_y = \frac{\lambda}{\sin \psi}, \quad \text{longueur d'onde selon } Oy \tag{9}$$

$$NN' = \lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \psi}, \quad \text{longueur d'onde selon } Oz \tag{10}$$

Or, de même qu'il y a un déphasage de 2π entre P et P', il y a aussi un déphasage de 2π entre M et M' ou N et N'. C'est pourquoi λ_y et λ_z méritent bien le nom de longueurs d'onde, mais ce sont des longueurs d'onde « apparentes » selon des directions différentes de la direction de propagation de l'onde.

D'autre part, comme le temps mis par l'onde pour aller de P en P' est le même que celui qu'elle met pour aller de M en M' ou de N en N', elle semble se propager plus rapidement selon les axes Oy et Oz que selon sa propre direction de propagation ; sa vitesse apparente sur les axes Oy et Oz sera respectivement :

$$v_y = \frac{v}{\sin \psi} \tag{11}$$

$$v_z = \frac{v}{\cos \psi} \tag{12}$$

À ces longueurs d'onde et vitesses de propagation « apparentes », on a donné le nom de longueurs d'onde de phase et de vitesses de phase.

12.3 PROPAGATION DANS UN GUIDE D'ONDES RECTANGULAIRE

12.3.1 Condition de propagation

a) Nous venons de voir qu'il était possible, sous certaines conditions, d'adjoindre un plan Σ' parallèle à Σ et d'obtenir une propagation guidée entre ces deux plans qui sont, rappelons-le, perpendiculaires au plan d'incidence (fig. 4). Voyons maintenant s'il est possible d'adjoindre des plans π et π' parallèles à yOz et perpendiculaires à Σ et Σ' sans perturber cette propagation. Les conditions de continuité à leur surface s'expriment par :

$$E_y = 0, \; E_z = 0, \; H_x = 0 \quad \forall\, y \text{ et } z.$$

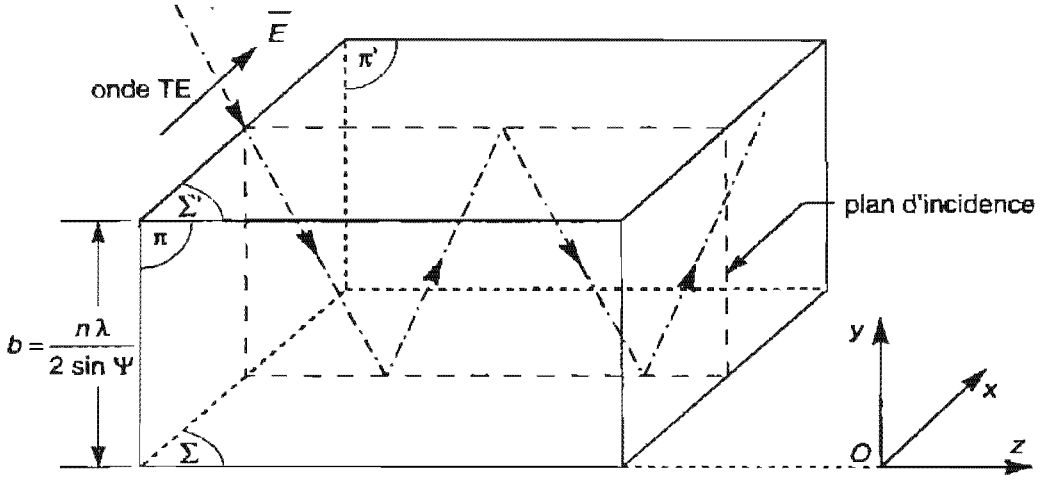


Figure 4. Propagation en mode TE_{on}.

Dans le cas où le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence (onde TE), ces conditions sont toujours vérifiées puisque nous avons : $E_y = 0$, $E_z = 0$ et $H_x = 0$.

Il est donc possible d'adjoindre deux plans π et π' perpendiculaires à Σ et Σ' et parallèles au plan d'incidence ; la seule condition est que les deux plans Σ et Σ' soient distants de

$$b = \frac{n\lambda}{2 \sin \psi} \tag{13}$$

Par contre, dans le cas où le champ électrique de l'onde incidente est dans le plan d'incidence (onde TM), il n'est pas possible que les conditions de continuité soient satisfaites sur les deux plans π et π' puisque E_y, E_z et H_x ne peuvent être nulles $\forall$ y et z. Il semble donc que la propagation d'une onde TM soit impossible à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire (voir, en fait, la remarque du § 12.3.3)

b) Nous avons considéré jusqu'ici une propagation qui se ferait par réflexions successives sur les plans Σ et Σ', ce qui est d'ailleurs logique puisque nous avons pris π et π' parallèles au plan d'incidence et qu'il ne saurait y avoir, dans ces conditions, de réflexions sur π et π'.

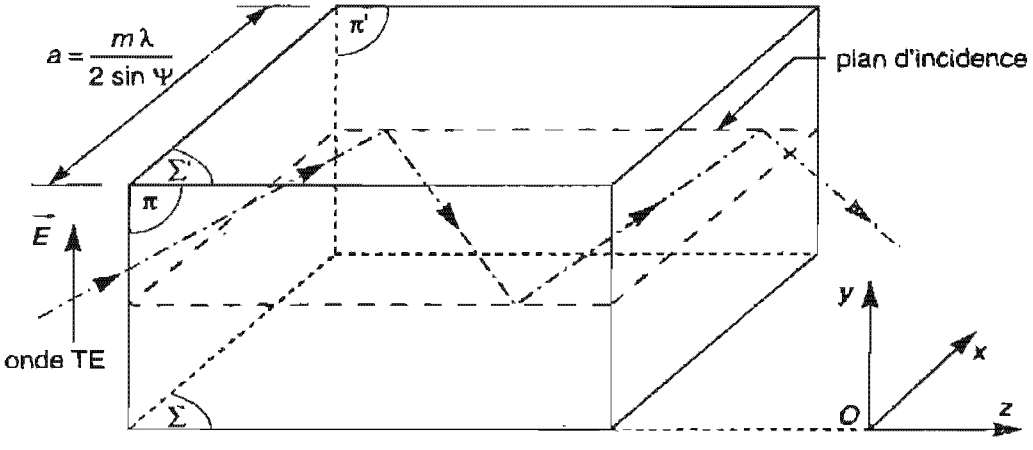


Figure 5. Propagation en mode TE_{mo}.

L'autre cas de propagation (fig. 5) est celui qui se ferait par réflexions successives sur π et π' ; il faudrait, pour cela, que le plan d'incidence soit parallèle à Σ et Σ' et que les deux plans π et π' soient distants de

$$a = \frac{m\lambda}{2 \sin \psi} \tag{14}$$

Dans ce cas, nous démontrerions aussi que la propagation n'est possible que si le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence (onde TE).

Il est d'ailleurs à remarquer, notations mises à part, que les figures 4 et 5 se déduisent l'une de l'autre par une simple rotation de 90° autour de l'axe du guide. Aussi n'est-il pas étonnant que l'étude de ces deux cas de figure conduise au même résultat. La conclusion que l'on peut en tirer est la suivante : *La propagation d'une O.E.M. à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire sera possible si le champ électrique de l'onde incidente est parallèle aux faces sur lesquelles cette onde va se réfléchir successivement.*

12.3.2 Définition des modes TE_{mo} et TE_{on}

Dans le premier cas de figure envisagé (fig. 4), la propagation de l'onde s'effectue par réflexions successives sur les faces perpendiculaires à Oy qui sont distantes de $b = n\lambda/2 \sin \psi$. Nous dirons, par convention, qu'il s'agit d'une onde ou mode TE_{on}. Le champ électrique étant horizontal, l'excitation de cette onde s'effectue à l'aide d'une petite antenne rectiligne (ou sonde), couplée au générateur, qui pénètre dans le guide horizontalement.

Les expressions des champs pour un tel mode TE_{on} sont données par les relations (1), (2) et (3).

Dans le second cas de figure envisagé (fig. 5), la propagation de l'onde s'effectue par réflexions successives sur les faces perpendiculaires à Ox qui sont distantes de $a = m\lambda/2 \sin \psi$. Par convention, il s'agit d'un mode TE_{mo}. Le champ électrique étant vertical, l'excitation de cette onde s'effectue à l'aide d'une sonde qui pénètre dans le guide verticalement.

Les expressions des champs pour ce mode TE_{mo} se déduisent des relations (1), (2), (3) du mode TE_{on} en remplaçant x par y et y par $-x$ pour les variables et en remplaçant $\hat{x}$ par $\hat{y}$ et $\hat{y}$ par $-\hat{x}$ pour les vecteurs unitaires des axes. Nous obtenons ainsi :

$$\underline{E}_y = \mathrm{j}\, E \sin (kx \sin \psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz \cos \psi} \tag{15}$$

$$\underline{H}_x = -\mathrm{j}\, H \cos \psi \sin (kx \sin \psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz \cos \psi} \tag{16}$$

$$\underline{H}_z = -H \sin \psi \cos (kx \sin \psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz \cos \psi} \tag{17}$$

Si $m = 1$ ou si $n = 1$, la propagation dans le guide d'ondes s'effectue selon le mode fondamental TE_{10} ou TE_{01}, les deux appellations étant équivalentes puisqu'elles ne dépendent que de la convention prise au départ.

12.3.3 Remarque sur les modes TM_{mn} et TE_{mn}

Nous avons vu qu'il ne paraissait pas possible de faire propager dans un guide d'ondes rectangulaire une onde dont le champ électrique se trouverait dans le plan d'incidence et qui se propagerait par réflexions successives sur Σ et Σ' (mode TM_{on}) ou sur π et π' (mode TM_{mo}). Or, une étude théorique complète de la propagation guidée (chapitre 13) montre la possibilité de propagation d'ondes TM_{mn} (avec m et $n \neq 0$). Cela tient au fait suivant : alors que pour les modes TM_{on} (TM_{mo}) les conditions de continuité ne peuvent être satisfaites sur les faces π et π' (Σ et Σ'), au contraire, pour les modes TM_{mn} (avec m et $n \neq 0$), ces conditions de continuité peuvent être satisfaites.

Il existe aussi des modes TE_{mn} avec m et $n \neq 0$ dont la présence sera révélée par l'étude générale de la propagation en guides d'ondes métalliques (chapitre 13). Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons uniquement les modes TE_{mo} (ou TE_{on}) et notamment le mode fondamental TE_{10} (ou TE_{01}).

12.4 LONGUEURS D'ONDE DE PROPAGATION GUIDÉE ET DE COUPURE

12.4.1 Relation fondamentale de la propagation guidée

En guide d'ondes rectangulaire, comme dans le cas de la propagation entre deux plans parallèles, nous pouvons définir des longueurs d'onde de phase.

Dans le cas (fig. 4) où la propagation s'effectue par réflexions sur Σ et Σ' (mode TE_{on}), nous avons :

- une longueur d'onde de phase $\lambda_z = \lambda/\cos\psi$, correspondant à la propagation de puissance active selon Oz,
- une longueur d'onde de phase $\lambda_y = \lambda/\sin\psi$ avec $\sin\psi = n\lambda/2b$ correspondant à la propagation de puissance réactive selon Oy.

D'où la relation :

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_y}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(18a)}$$

Dans le cas (fig. 5) où la propagation s'effectue par réflexions sur π et π' (modes TE_{mo}), nous avons :

- une longueur d'onde de phase $\lambda_z = \lambda/\cos\psi$, correspondant à la propagation de puissance active selon Oz,

- une longueur d'onde de phase $\lambda_x = \lambda/\sin\psi$ avec $\sin\psi = m\lambda/2a$ correspondant à la propagation de puissance réactive selon Ox.

D'où la relation : $$\left(\frac{\lambda}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(18b)}$$

Dans chacun de ces cas, la relation fondamentale de la propagation guidée s'écrit :

Mode TE_{mo} : $$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 \qquad \textbf{(19a)}$$

Mode TE_{on} : $$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2 \qquad \textbf{(19b)}$$

→ *λ est la longueur d'onde de propagation en espace libre dans le diélectrique constituant le guide ; elle est reliée à la vitesse de propagation en espace libre par la relation $\lambda = v/f$.*

→ *λ_z est la longueur d'onde apparente dans la direction de propagation de la puissance active : on l'appelle longueur d'onde de propagation guidée et on la note λ_g. Elle est reliée à la vitesse de phase v_z selon Oz par $\lambda_z = v_z/f$. C'est la longueur d'onde qui intervient dans le terme de phase $e^{-j\,kz\cos\psi}$ des relations donnant les champs. En effet :*

$$\because\ kz\cos\psi = \frac{2\pi}{\lambda} z\cos\psi = 2\pi\frac{z}{\lambda_z} \qquad \textbf{(20)}$$

→ *La signification physique de λ_x et λ_y est beaucoup plus délicate à saisir : en effet, il ne s'agit pas, à proprement parler, d'une longueur d'onde de propagation dans la direction Ox ou Oy puisqu'il y a, selon cette direction, un régime d'ondes stationnaires. Nous allons approfondir cette question en prenant l'exemple de λ_x (mode TE_{mo}).*

12.4.2 Longueur d'onde et fréquence de coupure

Voyons d'abord quelle est la valeur de λ_x :

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin\psi} \quad \text{et} \quad \sin\psi = \frac{m\lambda}{2a} \rightarrow \lambda_x = \frac{2a}{m} \qquad \textbf{(21)}$$

λ_x est donc fixé par les dimensions du guide. Pour comprendre sa signification, il est bon de réécrire la relation fondamentale (19a) en faisant intervenir la fréquence f de l'O.E.M. se propageant dans le guide :

$$\left(\frac{f}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 .$$

- Si $f/v > m/2a$, cette relation peut être satisfaite en prenant λ_z réel. Dans ces conditions, l'exponentielle $e^{-j\,2\pi z/\lambda_z}$ intervenant dans les relations qui donnent les champs est bien un terme de phase (dont le module est égal à 1) et il y a propagation de l'onde sans affaiblissement autre, bien sûr, que l'affaiblissement dans les parois que nous n'avons pas envisagé dans cette étude puisqu'elles sont supposées infiniment conductrices.
- Si $f/v < m/2a$, cette relation ne peut être satisfaite qu'en prenant λ_z imaginaire pur puisque $1/\lambda_z^2 < 0$. Donc tous les termes $e^{-j\,2\pi z/\lambda_z}$, sont de la forme e^{-Az}, A étant réel positif. Cela signifie que les champs s'affaiblissent exponentiellement lorsque z augmente. Dans ces conditions, l'onde ne se propage pas plus loin que quelques longueurs d'onde.

La fréquence $f_c = mv/2a$ qui vient d'être mise en évidence *et la longueur d'onde correspondante* $\lambda_c = 2a/m$, qui n'est autre que λ_x, *sont appelées la fréquence de coupure et la longueur d'onde de coupure du guide d'ondes* considéré, pour le mode TE_{mo}. En effet :

- Si $f > (f_c)_{mo}$ ou $\lambda < (\lambda_c)_{mo}$ il pourra y avoir propagation de TE_{mo}.
- Si $f < (f_c)_{mo}$ ou $\lambda > (\lambda_c)_{mo}$ il n'y aura pas propagation de TE_{mo}.

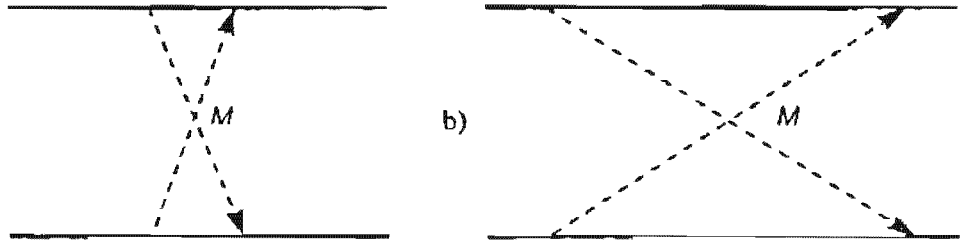


Figure 6. Directions de propagation des ondes planes dans le guide. *a.* Près de la coupure. *b.* Loin de la coupure.

Les figures 6a et 6b représentent les directions de propagation des ondes planes dans le guide d'ondes, près et loin de la coupure ; elles aident à comprendre les phénomènes : à la coupure, $\lambda = \lambda_x = 2a/m$, donc $\psi = \pi/2$; au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la coupure, l'angle ψ diminue.

12.4.3 Relations concernant λ, λ_c et λ_g

Dorénavant, nous écrirons toujours $\lambda_z = \lambda_g$ et λ_x ou $\lambda_y = \lambda_c$. Dans ces conditions, les relations (19a) et (19b) qui expriment la relation fondamentale de la propagation guidée s'écrivent :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 \qquad (22)$$

λ est la longueur d'onde de propagation en espace libre dans le diélectrique qui remplit le guide d'ondes ; elle se calcule d'après $\lambda = v/f$ avec $v = c/\sqrt{\varepsilon_r}$ et $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. ε_r est la permittivité relative du diélectrique du guide d'ondes.

$\lambda_c = 2a/m$ en mode TE_{mo} ; $\lambda_c = 2b/n$ en mode TE_{on}

- Si $\lambda < \lambda_c$, il y a propagation du mode considéré ; la longueur d'onde guidée se calcule alors d'après (22).
- Si $\lambda > \lambda_c$, il n'y a pas propagation du mode considéré.

12.5 ÉTUDE DU MODE FONDAMENTAL

Les modes TE_{10} (ou TE_{01}) sont ceux qui se propagent à l'intérieur des guides d'ondes standard les plus utilisés dans la pratique et dont on dit qu'ils fonctionnent selon le mode fondamental. Il est intéressant, à l'occasion de l'étude théorique de ce mode fondamental, de mettre en évidence certaines propriétés caractéristiques des guides d'ondes.

Dans ce paragraphe, nous allons prendre pour exemple le mode TE_{10} qui se propage par réflexions successives sur les faces π et π' distantes de $a = \lambda/2 \sin \psi$, avec un champ électrique polarisé verticalement (fig. 5).

12.5.1 Expressions des champs

Les champs du mode TE_{mo} sont donnés par les relations (15), (16) et (17). Pour le mode fondamental TE_{10}, nous avons :

$$\sin \psi = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\lambda}{2a} \tag{23}$$

$$\cos \psi = \frac{\lambda}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda^2}{4a^2}\right)} \tag{24}$$

d'où l'on déduit :

$$kx \sin \psi = \frac{2\pi}{\lambda} x \frac{\lambda}{2a} = \frac{\pi x}{a}$$

$$kz \cos \psi = \frac{2\pi}{\lambda} z \frac{\lambda}{\lambda_g} = 2\pi \frac{z}{\lambda_g}$$

Dans ces conditions, les expressions des champs deviennent :

$$\underline{E}_y = j E \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j 2\pi z/\lambda_g} \tag{25}$$

$$\underline{H}_x = -j H \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j 2\pi z/\lambda_g} \tag{26}$$

$$\underline{H}_z = -H\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j2\pi z/\lambda_g} \qquad (27)$$

Remarquons que le champ magnétique, qui a deux composantes orthogonales et déphasées de 90°, est à polarisation elliptique dans un plan perpendiculaire à la direction du champ électrique.

12.5.2 Variation transversale du champ électrique

Dans un plan de section transversale du guide, tel que *ABCD* (fig. 7), le champ électrique reste parallèle aux côtés *AC* et *BD* puisqu'il n'a qu'une composante E_y. En déplaçant parallèlement à *Ox* une sonde de mesure associée à un cristal détecteur et à un galvanomètre, nous allons observer les variations de la valeur efficace du champ électrique :

$$(E_y)_{ef} = \frac{E_y}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}}\left|\sin\frac{\pi x}{a}\right| \qquad (28)$$

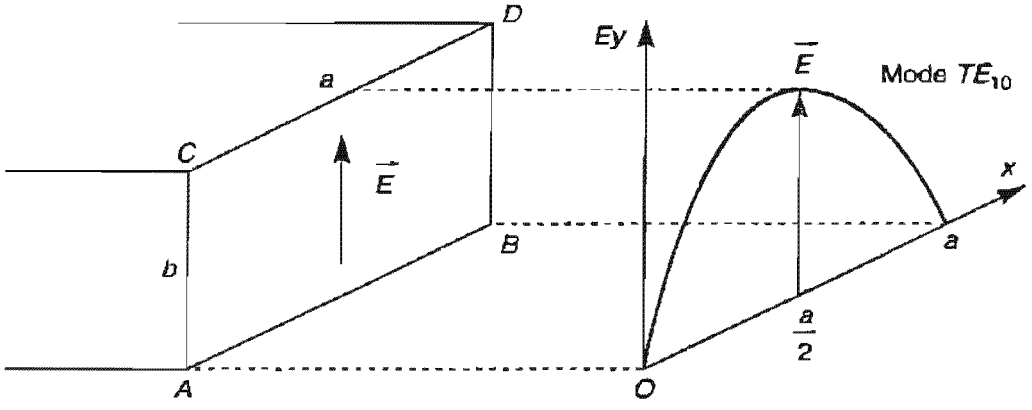


Figure 7. Variation transversale de $\vec{E}_y$ pour le mode fondamental.

Comme $0 \leq x \leq a$, nous obtenons une demi-sinusoïde avec minima nuls pour $x = 0$ et $x = a$ et maximum pour $x = a/2$.

C'est la coupe transversale du champ $\vec{E}$ caractéristique du mode fondamental.

12.5.3 Lignes de courant sur les faces du guide d'ondes

Les lignes de courant se calculent à partir de l'expression de la densité surfacique de courant électrique : $\vec{J} = \vec{n} \wedge \vec{H}$ où $\vec{n}$ est la normale à une face du guide et $\vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_z$.

Leur répartition sur les faces du guide est représentée sur la figure 8 dans laquelle le côté *a//Ox* est placé horizontalement tandis que le côté *b//Oy* est vertical.

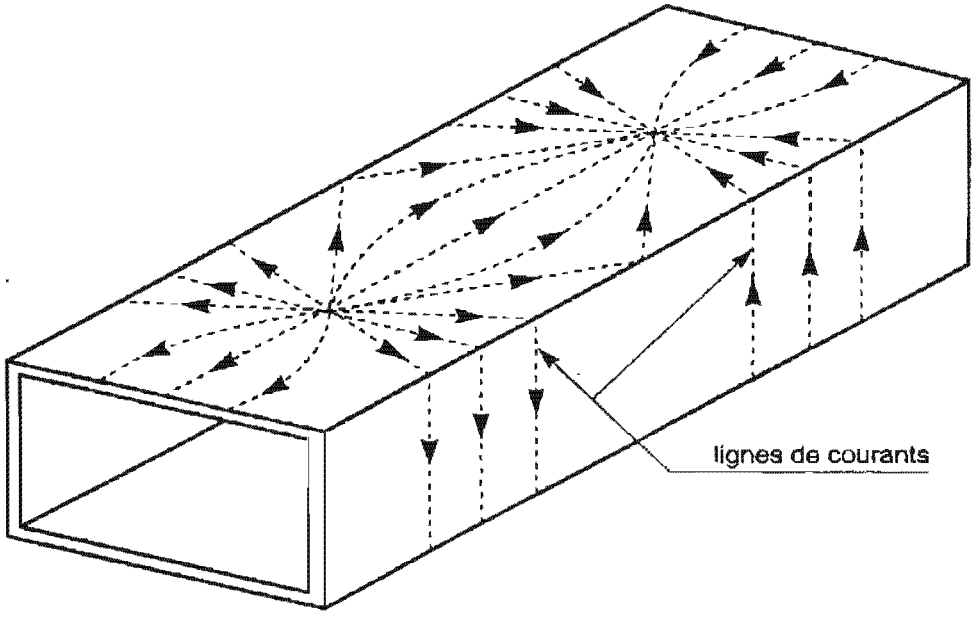


Figure 8.
Lignes de courant sur les faces d'un guide rectangulaire.

Il est important de noter que ces lignes sont :

- verticales sur les faces latérales,
- parallèles à l'axe des z uniquement au milieu des faces supérieure et inférieure.

On ne pourra donc usiner des fentes dans le guide, sans en perturber gravement le fonctionnement, que selon ces deux directions ; d'où les lignes de mesure à fente longitudinale. Dès que des fentes coupent les lignes de courant, elles rayonnent une partie de l'énergie qui se propage dans le guide : cela est d'ailleurs utilisé pour certains types d'antennes (volume II, chapitre 14 « Antennes réseaux »).

12.5.4 Puissance active transportée par le mode fondamental

C'est la puissance transportée selon la direction Oz. La densité de puissance selon cette direction nous est donnée par la relation :

$$\underline{P}_z = -\frac{1}{2}\underline{E}_y \underline{H}_x^* \quad (\mathrm{W/m^2}) \tag{29}$$

Soit :

$$\underline{P}_z = \frac{1}{2} EH \frac{\lambda}{\lambda_g} \sin^2 \frac{\pi x}{a}$$

En tenant compte de ce que $EH = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ et $\frac{\lambda}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}$

$$\underline{P}_z = \frac{1}{2} E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \qquad (30)$$

Cette expression représente la puissance qui traverse l'unité de surface perpendiculaire à Oz ; elle dépend du point où l'on se place dans la section transversale du guide d'ondes. La puissance moyenne active traversant un plan transversal du guide d'ondes nous est donnée par :

$$P = \frac{1}{2} E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \, dx \, dy$$

D'où :

$$P = \frac{1}{4} E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}} \, ab \quad \text{(W)} \qquad (31)$$

Connaissant la puissance d'alimentation du guide, cette expression permet de calculer E, valeur maximale du champ électrique au centre du guide ($x = a/2$). Réciproquement, connaissant E, on peut en déduire P. En particulier, la puissance maximale transportable est donnée par la valeur, notée P_{max}, de l'expression précédente lorsque le champ électrique au centre du guide correspond au champ de « claquage » E_{max} (champ pour lequel il y a amorce d'un arc électrique). L'air sec est le diélectrique qui donne les meilleurs résultats, notamment quand sa pression est élevée. En pratique, les guides d'ondes rectangulaires permettent de transporter des puissances moyennes de l'ordre du Mégawatt à 2,45 GHz (fréquence d'utilisation industrielle des micro-ondes) et de l'ordre de la centaine de Kilowatts à 10 GHz, ce qui est remarquable.

12.6 ÉTUDE DES MODES TE_{mo} OU TE_{on}

12.6.1 Coupes transversales

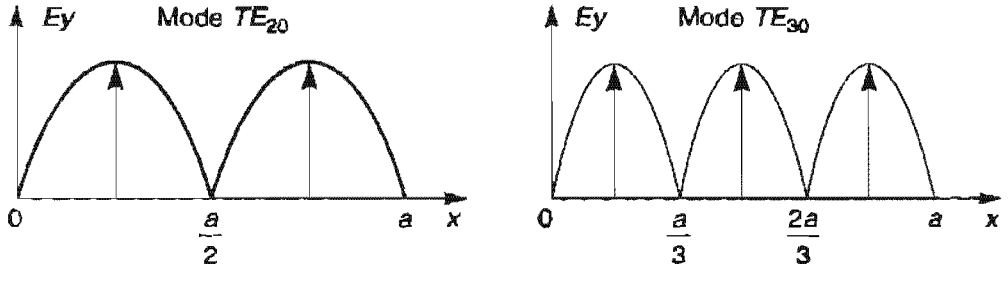


Figure 9. Coupes transversales des modes TE_{20} et TE_{30}

Pour les modes TE_{mo}, le module de E_y dans un plan de section transversale, tel que le plan $ABCD$ de la figure 7 est donné par $|\sin(m\pi x/a)|$. Pour les modes TE_{on}, le module de E_x est donné par $|\sin(n\pi y/b)|$.

La figure 9 montre quelles sont les variations, selon Ox, de l'amplitude du champ électrique parallèle à Oy pour les modes TE_{20} et TE_{30}. Nous aurions les mêmes variations selon Oy pour le champ électrique parallèle à Ox des modes TE_{02} et TE_{03}.

12.6.2 Longueur d'onde de coupure

Nous avons toujours $\lambda_c = \lambda/\sin\psi$; mais ici :

- Pour un mode TE_{mo} : $$a = \frac{m\lambda}{2\sin\psi}$$

 d'où : $$\lambda_c = \frac{2a}{m} \qquad (32)$$

- Pour un mode TE_{on} : $$b = \frac{n\lambda}{2\sin\psi}$$

 d'où : $$\lambda_c = \frac{2b}{n} \qquad (33)$$

 Pour $m = 1$ (mode TE_{10}), on retrouve bien $\lambda_c = 2a$.
 Pour $m = 2$ (mode TE_{20}), $\lambda_c = a$
 Pour $m = 3$ (mode TE_{30}), $\lambda_c = 2a/3$, etc.

- Pour un mode TE_{mn} (m et $n \neq 0$) :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \qquad (34)$$

12.6.3 Longueur d'onde de propagation guidée

C'est $\lambda_g = \lambda_z$; d'après (22), nous avons :

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 = 1$$

d'où : $$\frac{\lambda}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \qquad (35)$$

- Pour un mode TE_{mo} : $$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{4a^2}}} \qquad (36)$$

- Pour un mode TE_{on} :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda^2}{4 b^2}}} \tag{37}$$

12.7 DIMENSIONS ET BANDE PASSANTE D'UN GUIDE D'ONDES RECTANGULAIRE

Le problème se pose, en général, de la façon suivante :

- le guide d'ondes doit fonctionner en modes TE_{mo} jusqu'à l'ordre p et transmettre une bande de fréquences comprises entre f_1 et f_2 ($f_1 > f_2$ auxquelles correspondent $\lambda_1 < \lambda_2$) ;
- calculer les dimensions a (parallèle à Ox) et b (parallèle à Oy) du guide d'ondes.

Voici la solution de ce problème :

1) Pour que les modes TE_{mo} puissent se propager jusqu'à l'ordre p, il faut que $\lambda < (\lambda_c)_{p0}$, soit : $\lambda_2 < 2a/p$. D'où une première condition sur a :

$$a > p \frac{\lambda_2}{2} \tag{38}$$

2) Pour que les modes TE_{mo} d'ordre supérieur à p ne puissent pas se propager, il faut que $\lambda > (\lambda_c)_{p+1,0} > (\lambda_c)_{p+2,0} > \ldots$
D'où une deuxième condition sur a :

$$a < (p+1) \frac{\lambda_1}{2} \tag{39}$$

3) La dimension b, distance entre les deux plans Σ et Σ', n'influe pas, nous l'avons vu, sur les régimes TE_{mo} qui admettent les plans π et π' (parallèles à yOz) comme plans de réflexion. Elle ne peut cependant pas être arbitraire ; elle doit, en particulier, être suffisamment faible pour qu'aucun régime parasite TE_{on}, correspondant à des réflexions sur les plans Σ et Σ' (parallèles à xOz) ne puisse exister. Il faut donc que :
$\lambda_1 > (\lambda_c)_{01} = 2b > (\lambda_c)_{02} = b > \ldots$

D'où la condition sur b : $$b < \frac{\lambda_1}{2} \tag{40}$$

Finalement les conditions fixant les dimensions du guide sont :

$$b < \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{et} \quad p \frac{\lambda_2}{2} < a < (p+1) \frac{\lambda_1}{2} \tag{41}$$

Le problème inverse est celui de la détermination de la bande passante, selon un mode TE_{mo}, d'un guide d'ondes de dimensions a et b ($a > b$).

En résolvant en λ_1 et λ_2 les inégalités (38), (39) et (40), nous trouvons que les longueurs d'onde supérieure λ_2 et inférieure λ_1, de la bande passante du guide, sont :

$$\lambda_2 = \frac{2a}{m} \tag{42}$$

$$\lambda_1 = \text{Val sup}\left\lfloor \frac{2a}{m+1}, 2b \right\rfloor \tag{43}$$

Nous voyons que la bande passante d'un guide peut atteindre une octave ($\lambda_2 = 2\lambda_1$) en mode fondamental ($m = 1$) si $a = 2b$.

12.8 ATTÉNUATION DANS LES GUIDES D'ONDES RECTANGULAIRES

Nous avons supposé jusqu'ici que les parois du guide étaient constituées par des conducteurs parfaits, ce qui est évidemment un cas idéal auquel correspond une propagation sans perte. En fait, l'existence de courants dans des parois de conductivité finie implique qu'il y ait une dissipation d'énergie par effet Joule et, par conséquent, une propagation avec pertes. Les champs donnés par les expressions (1) et (3) pour un mode TE_{mo} et (15) à (17) pour un mode TE_{on} doivent être affectés d'un facteur $e^{-\alpha z}$ si l'on appelle α le paramètre de pertes.

Dans ces conditions, la variation de puissance le long de l'axe du guide est de la forme :

$$P(z) = P_0\, e^{-2\alpha z} \tag{44}$$

et par conséquent :

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{dP}{dz}}{P(z)} \tag{45}$$

Si l'on suppose que la puissance perdue dans le diélectrique est négligeable : $P(z)$ est la puissance transmise dans le diélectrique et $-(dP/dz)$ représente la puissance perdue dans les parois du guide.

La puissance transmise dans le diélectrique est donnée par :

$$P(z) = \frac{1}{2}\iint_S (\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{H}}^*) \cdot \vec{z}\, dS \tag{46}$$

La puissance perdue, par unité de largeur, sur les parois du guide *[53, p. 55-57]* est : $\frac{1}{2} R_S J_S^2$.

La puissance totale perdue dans les parois doit être évaluée sur le périmètre de la section transversale du guide, soit :

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} R_S \oint J_S^2 \, d\ell \tag{47}$$

R_S est la résistance superficielle de la paroi, qui est le quotient de sa résistivité ρ par la profondeur de pénétration δ due à l'effet de peau. Comme $\delta = 1/\sqrt{\pi\mu\sigma f}$ et $\rho = 1/\sigma$ (σ, conductivité) :

$$R_S = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}} \tag{48}$$

μ est la perméabilité magnétique des parois (en général $\mu = \mu_0$) ; J_S est la densité surfacique de courant électrique, donnée par :

$$\vec{J}_S = \vec{n} \wedge \vec{H} = \vec{H}_t \tag{49}$$

$\vec{n}$ est la normale à la paroi et $\vec{H}$ est le champ magnétique dans le guide au voisinage de la paroi.

Compte tenu des relations (45) à (49), le coefficient d'atténuation est obtenu d'après :

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_S \oint H_t^2 \, d\ell}{\iint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{z} \, dS} \tag{50}$$

Finalement, ce coefficient α s'exprime (voir exercice 12.8) pour le mode fondamental par :

$$\alpha \text{ (Np/m)} = \frac{1}{a^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon\nu}{\sigma} \cdot \frac{\mu}{\mu_0}} \cdot \frac{\left(\frac{f_c}{f}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{2b}\left(\frac{f}{f_c}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{51}$$

- Pour des guides géométriquement semblables (a/b fixé) et construits avec les mêmes matériaux (ε, σ donnés), si l'on maintient constant le rapport de la longueur d'onde aux dimensions du guide (λ/a et f/f_c constants) l'atténuation varie en raison inverse de $\lambda^{3/2}$. Donc, toutes choses égales d'ailleurs, α augmente si f augmente.
- Pour un guide d'ondes donné (a, b, ε, et σ fixés), $\alpha \to \infty$ si $f \to f_c$ ou si $f \to \infty$. Il doit donc y avoir une valeur f_m de f ($f_c < f_m < \infty$) pour laquelle l'atténuation est minimale. L'étude des variations de :

$$A = \frac{\left(\frac{f_c}{f}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{2b}\left(\frac{f}{f_c}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left|1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{52}$$

en fonction de la fréquence f, montre en effet que A passe par une valeur minimale A_m pour la valeur f_m de f définie par :

$$\frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{f_m}{f_c}\right)^2\left[\left(\frac{f_m}{f_c}\right)^2 - 3\right]}{6\left(\frac{f_m}{f_c}\right)^2 - 2} \tag{53}$$

Dans le cas, courant dans la pratique, d'un guide en cuivre rempli d'air : $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ et $\varepsilon v = \varepsilon_0 c = 1/120\pi$, le coefficient d'atténuation s'exprime par :

$$\alpha\,(\text{dB/m}) = \frac{1{,}47 \cdot 10^{-4}}{a^{3/2}} \cdot \frac{\left(\frac{f_c}{f}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{2b}\left(\frac{f}{f_c}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{54}$$

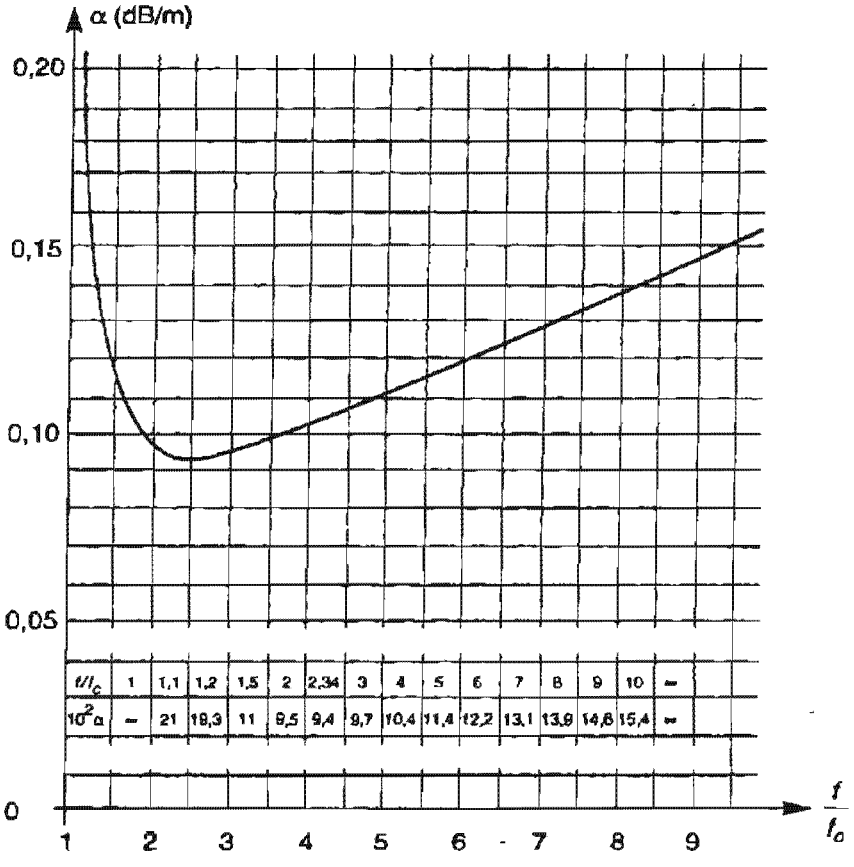


Figure 10.
Courbe d'atténuation du guide d'ondes R 100, de la bande *X*, pour lequel $f_c = 6{,}56$ GHz.

La variation de α (dB/m) en fonction de f/f_c est représentée par la courbe de la figure 10 dans le cas du guide d'ondes standard R 100 de la bande *X*, pour lequel : $a = 22{,}86$ mm et $b = 10{,}16$ mm $\rightarrow f_m/f_c = 2{,}34$ et $A_m = 2{,}2$.

La valeur minimale de *A* est $A_m = 2{,}2$ obtenue pour $f_m/f_c = 2{,}34$. Il lui correspond une valeur de $\alpha = 9{,}4 \cdot 10^{-2}$ dB/m. Nous voyons donc qu'un tel guide d'ondes, qui présente des pertes négligeables pour les faibles longueurs (de l'ordre du mètre) utilisées en laboratoire, aurait, en revanche, des pertes prohibitives sur les longueurs, de l'ordre de la dizaine de kilomètres sans répéteurs nécessaires pour les télécommunications.

Notons enfin que cette atténuation de 0,1 dB/m ne pourrait être obtenue que pour un guide dont les parois seraient parfaitement polies et recouvertes électrolytiquement d'un dépôt d'or afin de préserver le cuivre de la corrosion par l'air ambiant. Pour des guides d'ondes grossièrement usinés et non recouverts de couches protectrices, l'atténuation peut augmenter de 50 % (0,15 dB/m).

12.9 GUIDES RECTANGULAIRES SURDIMENSIONNÉS

Au-delà de 40 GHz, les dimensions des guides d'ondes standard deviennent très faibles ($a < 5$ mm et $b < 2{,}5$ mm), ce qui les rend très coûteux ; les atténuations deviennent supérieures à 1 dB/m, atteignant 3 dB/m vers 90 GHz pour des guides dont les parois doivent être parfaitement polies. Par ailleurs, cette réduction des dimensions s'accompagne d'une diminution de la puissance maximale transmissible. Ainsi, à 75 GHz, est-on limité à des puissances moyennes de l'ordre du kilowatt.

Pour pallier à ces inconvénients, on peut utiliser en ondes millimétriques, des guides standard des bandes centimétriques qui sont largement surdimensionnés pour les bandes millimétriques, d'où leur nom de guides surdimensionnés.

L'atténuation, en mode fondamental, dans un guide surdimensionné en cuivre pour lequel $a = 2b$, est déduite de la formule (54) compte tenu de ce que $f \gg f_c$; elle est donnée par :

$$\alpha\,(\text{dB/m}) = 3{,}8 \cdot 10^{-4}\,\frac{\sqrt{f}}{a} \qquad (55)$$

Dans cette formule f est en GHz et a en mètres. Avec un guide d'ondes standard de la bande *X*, cette atténuation n'est que de 0,14 dB/m à 70 GHz et 0,2 dB/m à 140 GHz.

Quant aux puissances transmissibles, elles se calculent toujours par la formule (31) et l'on voit qu'elles auraient plutôt tendance à augmenter en guides surdi-

mensionnés puisque, λ ayant diminué, le facteur $1 - \lambda^2/4a^2$ se rapproche de sa valeur maximale qui est 1.

Les performances qui viennent d'être indiquées ne peuvent être atteintes que si le mode fondamental se propage seul. Or, toute discontinuité du guide surdimensionné (changement de dimensions ou de direction) provoque la transformation d'un pourcentage important du mode fondamental en modes d'ordre supérieur. Il faudra donc prendre de très grandes précautions :

- d'une part pour l'excitation des guides surdimensionnés à partir des guides standard, par des transitions dont les dimensions varient très progressivement et en gardant aux dimensions le même rapport d'homothétie ;
- d'autre part, pour les liaisons du générateur au dispositif d'utilisation, qui doivent être exemptes de toute discontinuité.

12.10 LES GUIDES D'ONDES À NERVURE

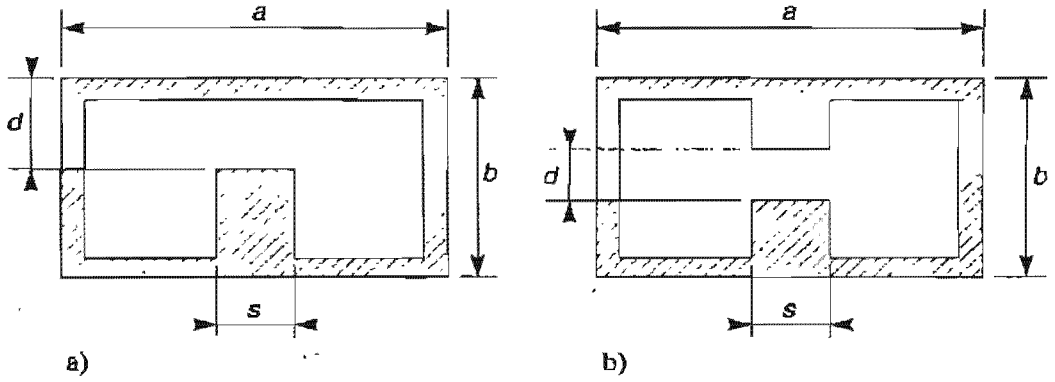


Figure 11.
Guides d'ondes
a. à simple nervure
b. à double nervure.

Il existe deux sortes de guides d'ondes à nervure (en anglais, *ridged wave guide*) : les guides à simple nervure (fig. 11a) et les guides à double nervure (fig. 11b). Dans la section transversale du guide, la discontinuité due à la nervure se traduit par une charge capacitive qui a pour effet – par rapport au guide rectangulaire équivalent, de dimensions a et b – d'abaisser la fréquence de coupure du mode fondamental TE_{10} et de laisser à peu près inchangée celle du premier mode d'ordre supérieur TE_{20}. En effet, cette nervure se trouve au centre du guide, là où le champ électrique du mode TE_{10} est maximal alors que celui du mode TE_{20} y est nul. Il en résulte une nette augmentation de la bande passante du mode fondamental par rapport à celle que l'on aurait en guide rectangulaire. Des largeurs de bande avec des rapports f_{max}/f_{min} de l'ordre de trois ont pu être obtenues, ce qui est deux fois meilleur qu'avec les guides rectangulaires.

Cette importante diminution de la fréquence de coupure du mode fondamental permet d'utiliser un guide nervuré de mêmes dimensions a et b qu'un guide rec-

tangulaire, à des fréquences nettement plus basses, ce qui réduit beaucoup l'encombrement. Cette propriété est particulièrement intéressante dans la gamme des UHF (300 – 3 000 MHz) où les dimensions des guides rectangulaires deviennent prohibitives.

Le calcul de la longueur d'onde de coupure du mode fondamental en fonction de la largeur s de la nervure, en prenant pour paramètre le rapport d/b, a été fait par Hopfer *[54]* dans le cas de guides à simple et à double nervure pour lesquels $b/a = 0{,}45$.

Les résultats sont montrés sur les figures 12a et b.

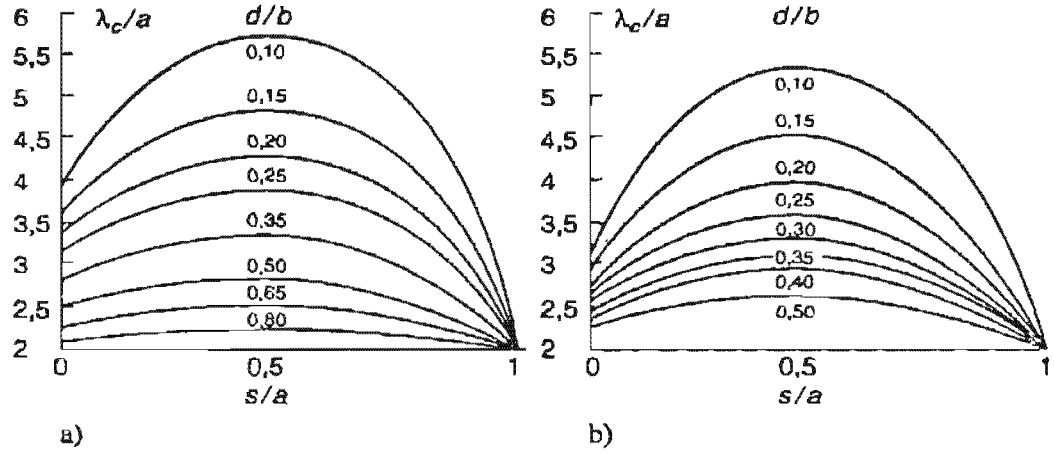


Figure 12.
λ_c de guides
a. à simple nervure,
b. à double nervure.

Ce calcul a été généralisé par Pyle *[55]* pour des rapports b/a quelconques. Il a, en effet, établi une relation entre la λ_c dans le cas général et dans le cas particulier :

$$\left(\frac{\lambda_c}{a}\right)_{\frac{b}{a}} = \left(\frac{\lambda_c}{a}\right)_{0,45} + \left(\frac{b}{a} - 0{,}45\right) F \qquad (56)$$

Cette relation fait intervenir un facteur F dont Pyle a donné des abaques en fonction de b/a, en faisant varier les paramètres s/a et d/b par dixièmes entre 0,1 et 0,9.

D'après Thourel *[46]*, des bandes de fonctionnement avec un rapport $f_M/f_m = 3{,}6$ ont pu être obtenues avec les dimensions suivantes :

- Pour le guide asymétrique : $b/a = 0{,}45$; $d/b = 0{,}128$; $s/a = 0{,}170$.
- Pour le guide symétrique : $b/a = 0{,}45$; $d/b = 0{,}195$; $s/a = 0{,}25$.

Par ailleurs, le calcul de l'impédance d'onde du mode fondamental d'après : $\zeta_{TE} = \zeta/\cos\psi$ où $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ et $\cos\psi = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$ montre que l'impédance d'onde d'un guide à nervure est plus petite que celle d'un guide rectangulaire. Cette propriété peut être utilisée pour réaliser des transitions à large bande entre lignes coaxiales dont l'impédance caractéristique est plus faible et les guides rectangulaires dont l'impédance d'onde du fondamental est plus élevée *[46, p. 245]*.

Cependant, les guides à nervure ne peuvent pas transporter des puissances aussi importantes que les guides rectangulaires. L'étude des champs électromagnétiques montre, en effet, qu'ils sont concentrés au voisinage de la nervure où le champ de claquage est réduit dans le rapport d/b par rapport au guide rectangulaire. Comme la puissance maximale transportable est proportionnelle au carré du champ de claquage, il en résulte une très forte diminution de celle-ci.

Notons enfin que ce guide a un affaiblissement plus grand que le guide rectangulaire, mais que ses caractéristiques sont moins sensibles aux imperfections de fabrication.

12.11 LA LIGNE À AILETTES

12.11.1 Intérêt de cette ligne

La ligne à ailettes, proposée par Meier en 1972, est un guide d'ondes qui contient, dans le plan de symétrie électrique, un substrat diélectrique sur lequel sont déposées des bandes conductrices séparées par une fente (fig. 13) dans une configuration bilatérale ou unilatérale.

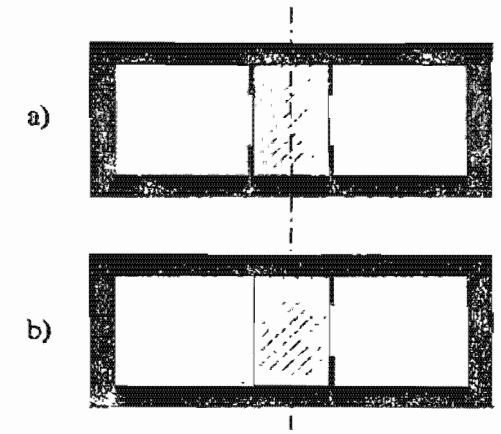


Figure 13.
Ligne à ailettes
a. bilatérale
b. unilatérale.

Par rapport au guide d'ondes non chargé de mêmes dimensions, les principaux avantages sont les suivants :

- la fréquence de coupure du mode fondamental (qui est un mode hybride) est abaissée et sa bande passante est élargie (environ une octave),
- les paramètres caractéristiques de la propagation (α et β) sont assez peu sensibles à la précision d'usinage et à la qualité des conducteurs constituant les parois (ce qui permet d'utiliser des matériaux légers et bon marché comme l'aluminium),
- une structure plane facile à fabriquer – grâce aux méthodes bien au point pour les lignes microbandes – et pouvant se prêter aux techniques d'intégration.

Par rapport à la ligne microbande, notons que :

- les pertes de propagation sont un peu plus faibles (de 0,05 à 0,1 dB/λ) et il n'y a pas de perte par rayonnement,
- le couplage à un guide d'ondes est beaucoup plus simple.

12.11.2 Paramètres caractéristiques

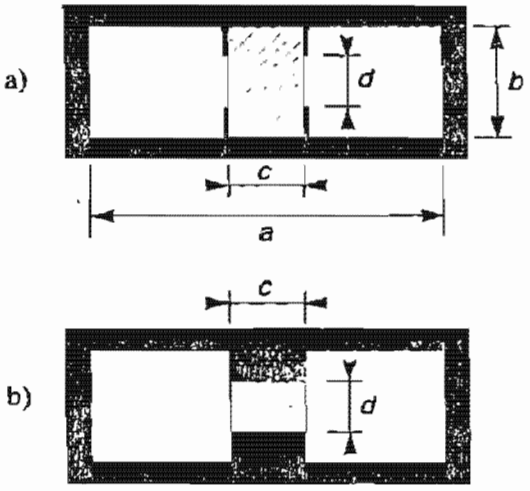


Figure 14. Dimensions de la ligne à ailettes (a) et du guide nervuré (b) équivalents.

Les paramètres caractéristiques de cette ligne, calculés par Meier *[56]*, sont la longueur d'onde guidée et l'impédance caractéristique. Pour cela, Meier a identifié la ligne à ailettes (fig. 14a) à un guide nervuré (fig. 14b) dont la fente, de largeur c et de hauteur d, contiendrait un diélectrique de même permittivité ε_r que celui qui sert de substrat dans la ligne à ailettes.

Cette approximation suppose que le champ dans le diélectrique situé entre les ailettes est nul ; elle est donc d'autant meilleure que les rapports c/a et $(b - d)/b$ sont plus petits. Dans ces conditions, on peut utiliser les formules des guides nervurés *[54]*.

La longueur d'onde guidée (d'où l'on déduit le paramètre de phase $\beta = 2\pi/\lambda_g$) est donnée par la formule générale de la propagation guidée :

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}.$$

Dans le modèle équivalent à la ligne à ailettes, il faut tenir compte de l'effet du diélectrique qui charge la fente. Pour cela, Meier a introduit une permittivité équivalente ε_e à la place du 1 correspondant au cas de l'air ; d'où

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_e - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \qquad (57)$$

λ_c est identique à la longueur d'onde de coupure d'un guide nervuré, de dimensions identiques à la ligne à ailettes.

L'impédance caractéristique Z_a est donnée par :

$$Z_a = Z_{a\infty}\left[\varepsilon_e - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (58)$$

Dans cette formule, $Z_{a\infty}$ est l'impédance caractéristique du guide d'ondes nervuré de dimensions identiques, dans la limite où $\lambda \to 0$ ($f \to \infty$).

Le calcul de λ_g et Z_a passe donc par la détermination de ε_e, λ_c et $Z_{a\infty}$. Des formules empiriques ont été établies par Sharma et Hoefer *[60]* ; seule l'expression de λ_c est simple :

$$\frac{b}{\lambda_c} = 0{,}245 \left(\frac{d}{b}\right)^{0.173} \tag{59}$$

Les expressions pour ε_e et $Z_{a\infty}$ sont trop longues pour que nous les donnions ici. On pourra les trouver, *in extenso*, dans *[38, p. 293-296]* pour divers types de lignes à ailettes unilatérales ou bilatérales, à substrat diélectrique de $\varepsilon_r = 2{,}22$ et $\varepsilon_r = 3$.

EXERCICES

EXERCICE 12.1

(Paragraphe 12.4 – Longueur d'onde de propagation guidée et de coupure)

1) Déterminer la fonction qui donne l'affaiblissement en décibels d'un guide d'ondes rectangulaire si $\lambda > \lambda_c$, longueur d'onde de coupure du mode fondamental.

2) Affaiblissement sur une distance $z = \lambda$ d'un guide d'ondes utilisé à une fréquence telle que $\lambda = \sqrt{2}\,\lambda_c$.
Même question si $\lambda = 1{,}2\,\lambda_c$.

EXERCICE 12.2

(Paragraphe 12.5.1 – Expression des champs du mode fondamental)

1) Démontrer que dans un guide rectangulaire fonctionnant en mode fondamental TE_{10}, il existe deux plans à x = cte où le champ magnétique est à polarisation circulaire droite ou gauche.

2) Quelle relation y a-t-il entre ces deux valeurs de x ? Application au cas où $f = f_c\sqrt{2}$.

EXERCICE 12.3

(Paragraphe 12.5.3 – Lignes de courant sur les faces du guide d'ondes)

1) Calculer les composantes de la densité surfacique de courant $\vec{J}$ sur les faces d'un guide d'ondes fonctionnant en mode fondamental.

2) En déduire la direction des lignes de courant :

a) au milieu de la face supérieure du guide d'ondes,

b) sur les faces latérales du guide.

EXERCICE 12.4

(Paragraphe 12.5.4 – Puissance active transportée par le mode fondamental)

Le guide d'ondes standard de la bande X (8,2-12,4 GHz) a pour dimensions a = 22,86 mm et b = 10,16 mm ; il est utilisé à une fréquence f = 10 GHz.

1) Ce guide d'ondes étant alimenté par une puissance de 20 mW, en déduire la valeur du champ électrique au milieu du guide.

2) Sachant que la valeur maximale du champ électrique dans l'air qui remplit le guide est de 15 000 V/cm, calculer la puissance maximale transportable par ce guide.

EXERCICE 12.5

(Paragraphe 12.7 – Dimension et bande passante d'un guide d'ondes rectangulaire)

1) Calculer les conditions auxquelles doivent satisfaire les dimensions a et b ($a > b$) des côtés d'un guide d'ondes rectangulaire rempli d'air pour que, à la fréquence de 10 GHz, il ne puisse s'y propager que le mode fondamental TE_{10}.

2) Même question dans la bande de fréquences 8-12 GHz.

EXERCICE 12.6

(Paragraphe 12.7 – Dimension et bande passante d'un guide d'ondes rectangulaire)

1) Les dimensions du guide d'ondes standard R 48 sont : $a = 47{,}55$ mm et $b = 22{,}15$ mm ; il est rempli d'air. Calculer dans quelle bande de fréquences il ne pourra se propager que le mode fondamental TE_{10}.

2) Même question si le guide est rempli d'un diélectrique de permittivité $\varepsilon_r = 2{,}25$.

EXERCICE 12.7

(Paragraphe 12.7 – Dimension et bande passante d'un guide d'ondes)

Un guide d'ondes carré à 2,4 cm de côté. Il est excité par deux petites antennes perpendiculaires aux faces orthogonales du guide qui est rempli d'air.

1) Écrire la condition de propagation des modes fondamentaux TE_{10} et TE_{01}.

2) Trouver le premier mode supérieur et écrire la condition de non propagation de ce mode.

3) En déduire la bande passante de ce guide carré en modes fondamentaux.

EXERCICE 12.8

(Paragraphe 12.8 – Atténuation dans les guides d'ondes rectangulaires)

Démontrer la formule (51) donnant le coefficient d'atténuation du mode fondamental dans un guide d'ondes rectangulaire, de dimensions a et b, rempli d'un diélectrique caractérisé par (ε, μ_0) et dont les parois sont caractérisées par (σ, μ).

Chapitre 13

Étude générale de la propagation en guides d'ondes métalliques

13.1 INTRODUCTION

Un ensemble de conducteurs métalliques dont la structure reste invariante quand on effectue une translation, le long de l'une des lignes de coordonnées, forme un guide d'ondes. Les schémas de la figure 1 en donnent quelques exemples.

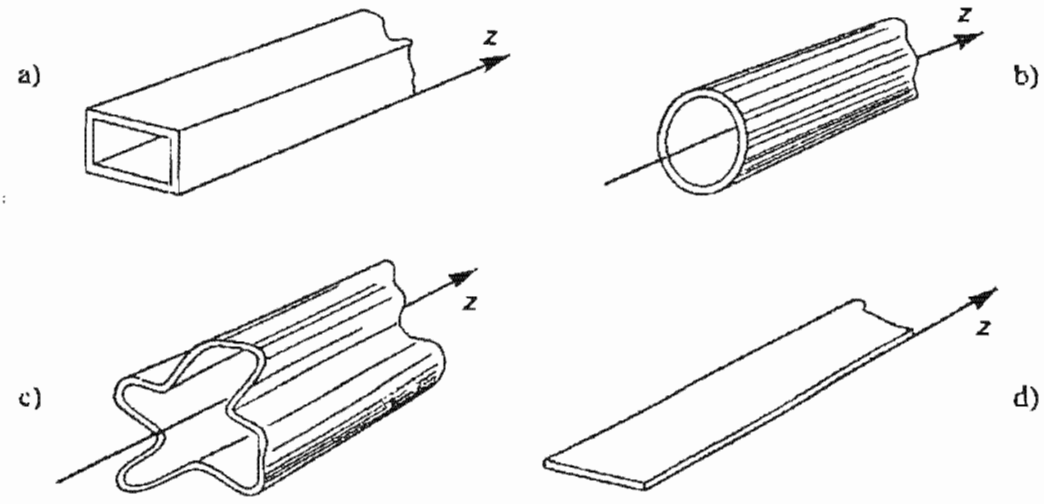


Figure 1.
Divers types de guides d'ondes.
a. Guide rectangulaire
b. Guide cylindrique
c. Guide de forme quelconque.
d. Ruban métallique.

D'après Gabillard, *Vibrations et phénomènes de propagations*, Dunod *[57, p. 179]*

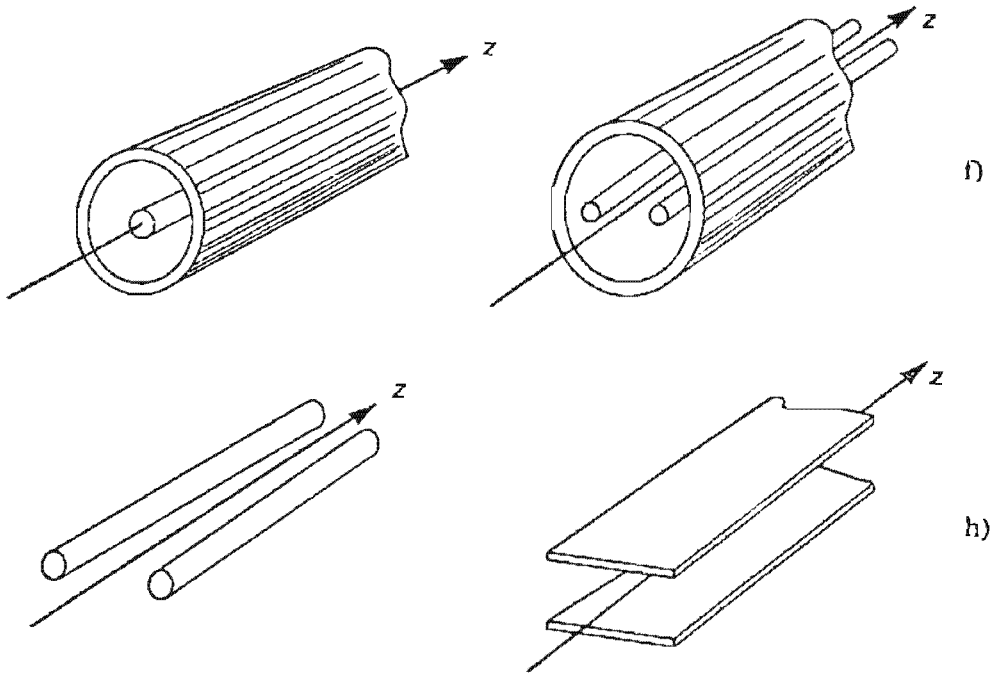


Figure 1 (suite). Divers types de guides d'ondes.
e. Ligne coaxiale.
f. Ligne bifilaire blindée.
g. Ligne bifilaire.
h. Ligne à bandes

D'après *[57, p. 179]*.

13.2 ÉQUATIONS DE PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES

13.2.1 Principes généraux

Dans un milieu diélectrique de permittivité électrique ε, de perméabilité magnétique μ et de conductivité $\sigma = 0$, les équations de Maxwell s'écrivent, en régime sinusoïdal (vol. 2, chap. 5 « Équations de Maxwell ») :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\,\underline{\vec{H}} \qquad \text{(équation de Maxwell – Faraday)} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\,\underline{\vec{E}} \qquad \text{(équation de Maxwell – Ampère)} \qquad (2)$$

$$\text{div}\,\underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}\,\underline{\vec{H}} = 0 \qquad \text{(équations complémentaires)} \qquad (3)$$

On démontre (vol. 2, chap. 6 « Propagation des O.E.M. en espace libre ») que l'équation de propagation des champs est de la forme

$$\Delta\,(\underline{\vec{E}} \text{ ou } \underline{\vec{H}}) + \omega^2\,\varepsilon\mu\,(\underline{\vec{E}} \text{ ou } \underline{\vec{H}}) = 0 \qquad (4)$$

Dans tous les cas de propagation guidée – par rapport à un système de coordonnées curvilignes orthogonales désignées par q_1, q_2, q_3 – la solution de cette

équation de propagation, pour une onde qui se propage le long d'un guide dont l'axe est la coordonnée q_3, est de la forme :

$$\vec{\underline{e}}\,(q_1, q_2, q_3, t) = \vec{\underline{E}}\,(q_1, q_2)\, e^{-\gamma q_3}\, e^{j\omega t} \qquad \textbf{(5a)}$$

$$\vec{\underline{h}}\,(q_1, q_2, q_3, t) = \vec{\underline{H}}\,(q_1, q_2)\, e^{-\gamma q_3}\, e^{j\omega t} \qquad \textbf{(5b)}$$

$\vec{\underline{e}}$ et $\vec{\underline{h}}$ sont les valeurs instantanées complexes des champs ; $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{H}}$ sont leurs amplitudes complexes dans un plan transversal, perpendiculaire à l'axe longitudinal de la propagation.

γ est le paramètre caractéristique de la propagation guidée.

On choisira le système de coordonnées le mieux adapté à la géométrie du cas considéré.

Les deux systèmes les plus utilisés (fig. 2) sont :

- les coordonnées rectangulaires où : $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$
- les coordonnées cylindriques où : $q_1 = \rho$; $q_2 = \varphi$; $q_3 = z$

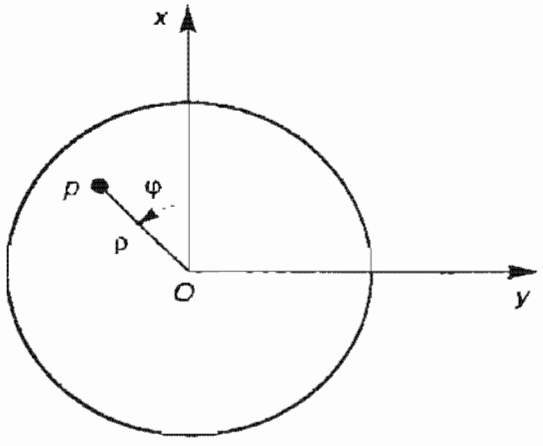


Figure 2. Coordonnées rectangulaires et cylindriques. L'axe z est perpendiculaire au plan de la figure.

L'étude de la propagation guidée revient à déterminer :

a) le paramètre de propagation γ qui, selon les cas, pourra être :
 - imaginaire si la propagation est sans perte, soit $\gamma = j\beta$,
 - réel s'il n'y a pas propagation, soit $\gamma = \alpha$,
 - complexe si la propagation est avec pertes, soit $\gamma = \alpha + j\beta$;

b) les deux fonctions vectorielles $\vec{\underline{E}}\,(q_1, q_2)$ et $\vec{\underline{H}}\,(q_1, q_2)$ qui mettent en jeu les six composantes scalaires des champs :
 - les composantes longitudinales $\underline{E}_3 = \underline{E}_z$ et $\underline{H}_3 = \underline{H}_z$,
 - les composantes transversales $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$ et $\underline{H}_1$, $\underline{H}_2$.

En fait, il suffira de déterminer les expressions des deux composantes longitudinales, compatibles avec les conditions aux limites, pour que le problème soit résolu.

En effet, nous allons montrer que l'on peut déduire toutes les composantes transversales des deux composantes longitudinales grâce aux équations de Maxwell (1) et (2) ; c'est pourquoi $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$ sont appelées « fonctions génératrices ». Nous ferons cette démonstration en utilisant d'abord les coordonnées rectangulaires et puis les coordonnées cylindriques.

13.2.2 Détermination des composantes transversales en *x* et *y*

En coordonnées rectangulaires, en remarquant que $\partial/\partial_z = -\gamma$ et en sous-entendant les facteurs $e^{-\gamma z}$ e $^{j\omega t}$ les équations de Maxwell s'écrivent, sous forme différentielle :

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + \gamma \underline{E}_y = -j\omega\mu \underline{H}_x \tag{6}$$

$$-\gamma \underline{E}_x - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu \underline{H}_y \tag{7}$$

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu \underline{H}_z \tag{8}$$

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + \gamma \underline{H}_y = -j\omega\varepsilon \underline{E}_x \tag{9}$$

$$-\gamma \underline{H}_x - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon \underline{E}_y \tag{10}$$

$$\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon \underline{E}_z \tag{11}$$

Les éliminations de $\underline{H}_y$ entre (7) et (9) et de $\underline{H}_x$ entre (6) et (10) permettent d'obtenir $\underline{E}_x$ et $\underline{E}_y$ en fonction de $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$. De même, les éliminations de $\underline{E}_y$ entre (6) et (10) et de $\underline{E}_x$ entre (7) et (9) permettent d'obtenir $\underline{H}_x$ et $\underline{H}_y$ en fonction de $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$. En posant :

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu = k_c^2 \tag{12}$$

nous obtenons :

$$k_c^2 \underline{E}_x = -\gamma \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \tag{13}$$

$$k_c^2 \underline{E}_y = -\gamma \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \tag{14}$$

$$k_c^2 \underline{H}_x = j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \tag{15}$$

$$k_c^2 \underline{H}_y = -j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \tag{16}$$

Remarquons tout de suite que les composantes transversales ne peuvent être calculées en fonction des composantes longitudinales que si $k_c^2 \neq 0$.

13.2.3 Détermination des composantes transversales en ρ et φ

Dans un guide d'ondes présentant la symétrie de révolution, il est judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z). Comme les champs doivent se reproduire identiques à eux-mêmes chaque fois que φ augmente de 2π ou de $2\pi/n$, nous pouvons supposer qu'ils dépendent de φ par une fonction $e^{-jn\varphi}$ où n est un entier ; donc $\partial/\partial\varphi = -jn$. Nous nous rappellerons, par ailleurs, que les champs varient en z comme $e^{-\gamma z}$: donc $\partial/\partial z = -\gamma$. Écrivons maintenant les composantes des équations de Maxwell (1) et (2) compte tenu de ces résultats et en sous-entendant, de plus, $e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$.

$$-\frac{jn}{\rho}\underline{H}_z + \gamma \underline{H}_\varphi = j\omega\varepsilon \underline{E}_\rho \tag{17}$$

$$-\gamma \underline{H}_\rho - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} = j\omega\varepsilon \underline{E}_\varphi \tag{18}$$

$$\frac{1}{\rho}\underline{H}_\varphi + \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \rho} + \frac{jn}{\rho}\underline{H}_\rho = j\omega\varepsilon \underline{E}_z \tag{19}$$

$$-\frac{jn}{\rho}\underline{E}_z + \gamma \underline{E}_\varphi = -j\omega\mu \underline{H}_\rho \tag{20}$$

$$-\gamma \underline{E}_\rho - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} = -j\omega\mu \underline{H}_\varphi \tag{21}$$

$$\frac{1}{\rho}\underline{E}_\varphi + \frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \rho} + \frac{jn}{\rho}\underline{E}_\rho = -j\omega\mu \underline{H}_z \tag{22}$$

Les éliminations de $\underline{H}_\varphi$ entre (17) et (21) et de $\underline{H}_\rho$ entre (18) et (20) permettent d'obtenir $\underline{E}_\rho$ et $\underline{E}_\varphi$ en fonction de $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$. De même, les éliminations de $\underline{E}_\varphi$ entre (18) et (20) et de $\underline{E}_\rho$ entre (17) et (21) permettent d'obtenir $\underline{H}_\rho$ et $\underline{H}_\varphi$ en fonction de $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$. En posant $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu$, il vient :

$$k_c^2 \underline{E}_\rho = -\frac{\omega\mu n}{\rho}\underline{H}_z - \gamma\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \tag{23}$$

$$k_c^2 \underline{E}_\varphi = j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} + j\frac{\gamma n}{\rho}\underline{E}_z \tag{24}$$

$$k_c^2 \underline{H}_\rho = -\gamma \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \varepsilon n}{\rho} \underline{E}_z \tag{25}$$

$$k_c^2 \underline{H}_\varphi = j \frac{\gamma n}{\rho} \underline{H}_z - j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \tag{26}$$

13.2.4 Cas particulier des ondes T.E.M.

D'après les relations (13) à (16) ou (23) à (26), nous voyons que les composantes transversales ne peuvent être calculées en fonction des composantes longitudinales que si $k_c^2 \neq 0$. Par contre, si $k_c^2 = 0$, les relations suscitées ne peuvent être satisfaites que si $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$ sont nulles. Cela se produit pour des guides tels que la ligne bifilaire ou coaxiale où les champs sont purement transversaux, ce qui correspond à des modes de propagation du type T.E.M. (Transverse Électrique et Magnétique).

C'est d'ailleurs en raison de cette propriété que l'étude de ces types de lignes a pu être effectuée [voir 1re partie] à partir des concepts tension et courant pour lesquels on peut alors trouver en H.F. une signification physique. Notons enfin que puisque $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu = 0$, la vitesse de propagation sur une ligne T.E.M. sans perte : $v = \omega/\beta = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ est la même qu'en espace libre.

13.2.5 Équation de propagation des composantes longitudinales

Considérant la relation (4). Le laplacien peut être mis sous la forme :

$$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Comme $\partial^2/\partial z^2 = \gamma^2$ et $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu$, nous pouvons écrire les équations de propagation des composantes longitudinales :

$$\Delta_t \underline{E}_z + k_c^2 \underline{E}_z = 0 \tag{27a}$$

$$\Delta_t \underline{H}_z + k_c^2 \underline{H}_z = 0 \tag{27b}$$

Ces équations nous permettent, compte tenu des conditions aux limites imposées à $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$, de calculer $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_z$ en tout point du diélectrique du guide.

13.3 LES DIFFÉRENTS TYPES D'ONDES DE PROPAGATION GUIDÉE

L'étude que nous venons de faire nous montre que le régime le plus général pouvant exister dans un guide d'ondes est formé des six composantes des champs. Ce régime peut toujours être considéré comme résultant de la superposition de deux ondes :

a) Une onde pour laquelle $\underline{E}_z = 0$, dite Onde Transverse Électrique TE ou onde H.

b) Une onde pour laquelle $\underline{H}_z = 0$, dite Onde Transverse Magnétique TM ou onde E.

Une telle décomposition n'a rien d'artificiel. Elle correspond à l'existence simultanée des deux types d'ondes que nous avons déjà étudiés au chapitre 11 « Réflexion et réfraction des O.E.M. » :

- une onde plane dont le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan d'incidence pour laquelle $\underline{E}_z = 0$ ($\vec{H}$ est alors dans le plan d'incidence et $H_z \neq 0$) ;
- une onde plane dont le champ $\vec{H}$ est perpendiculaire au plan d'incidence pour laquelle $\underline{H}_z = 0$ ($\vec{E}$ est alors dans le plan d'incidence et $E_z \neq 0$).

Pour les ondes TE, la fonction génératrice $\underline{H}_z$ dont découlent les quatre autres est déterminée à partir de : $\Delta_t \underline{H}_z + k_c^2 \underline{H}_z = 0$ (27b) en tenant compte de la condition imposée à H_z sur les parois métalliques du guide* : $\partial H_z/\partial n = 0$.

Pour les ondes TM, la fonction génératrice $\underline{E}_z$ est déterminée à partir de $\Delta_t \underline{E}_z + k_c^2 \underline{E}_z = 0$ (27a) en tenant compte de la condition imposée à E_z sur les parois du guide* : $E_z = 0$.

On démontre, en mathématiques, que ces équations n'admettent de solutions, compte tenu des conditions imposées aux limites, que pour une suite de valeurs discrètes de k_c, notée k_{cp}, appelées valeurs propres. Les ondes correspondant à ces valeurs de k_c sont appelées « modes de propagation ».

Le paramètre de propagation γ est donné par la relation :

$$\gamma = (k_c^2 - \omega^2 \varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} \qquad (28)$$

Dans cette relation $\omega^2 \varepsilon\mu$ est positif pour un milieu diélectrique comme l'air dont les pertes sont négligeables tandis que k_c^2 est une constante qui peut être positive ou négative. Nous allons donc distinguer les deux cas.

* Les parois du guide étant parallèles à l'axe des z :

- la condition $E_z = 0$ se déduit directement de $E_T = 0$,
- la condition $\partial H_z/\partial n = 0$ se démontre à partir de rot $\vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E}$ en tenant compte de ce que $E_T = 0$ et $H_N = 0$.

13.3.1 Ondes TE ou TM telles que $k_c^2 > 0$

Ce cas se produit pour des guides dits à section « simplement connexe » constitués par un conducteur creux à l'intérieur duquel il n'y a que du diélectrique (fig. 1a, b, c).

a) Si $k_c^2 > \omega^2 \varepsilon\mu$, c'est-à-dire si $f < k_c/2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}$, γ^2 est positif, donc $\gamma = \alpha$ est réel. Par conséquent :

- en onde TM : $\underline{e}_z = \underline{E}_z(x, y \text{ ou } \rho, \varphi)\, e^{-\alpha z}\, e^{j\omega t}$ (29a)
- en onde TE : $\underline{h}_z = \underline{H}_z(x, y \text{ ou } \rho, \varphi)\, e^{-\alpha z}\, e^{j\omega t}$ (29b)

C'est une onde dont l'amplitude diminue exponentiellement et pour laquelle on ne peut mettre en évidence ni périodicité dans l'espace ni vitesse de propagation puisque le terme de phase ne dépend que du temps. Une telle onde est appelée onde évanescente. Au sens classique que l'on donne à la propagation, on peut dire qu'il n'y a pas propagation.

b) Si $k_c^2 < \omega^2 \varepsilon\mu$, c'est-à-dire si $f > k_c/2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}$, γ^2 est négatif, donc $\gamma = j\beta$ est imaginaire et par conséquent :

- en onde TM : $\underline{e}_z = \underline{E}_z(x, y \text{ ou } \rho, \varphi)\, e^{j(\omega t - \beta z)}$ (30a)
- en onde TE : $\underline{h}_z = \underline{H}_z(x, y \text{ ou } \rho, \varphi)\, e^{j(\omega t - \beta z)}$ (30b)

Ces expressions caractérisent une onde qui se propage sans affaiblissement le long de l'axe des z. Si, de plus, l'on tenait compte des pertes dans le diélectrique (paragraphe 13.3.3) et dans les parois, la propagation se ferait avec un affaiblissement. Un tel phénomène est représenté par un paramètre de propagation complexe $\gamma = \alpha + j\beta$ et les expressions des champs doivent être multipliées par un terme en $e^{-\alpha z}$.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

Dans le cas sans perte, $\gamma = j\beta$; β est le paramètre de phase de la propagation qui est relié à la vitesse de phase de l'onde par :

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{31}$$

et à la longueur d'onde de propagation guidée par :

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \tag{32}$$

Comme nous traitons un cas pour lequel $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2$ est positif, nous avons :

$$\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{v_p^2} > 0 \quad \text{d'où :} \quad v_p > v \tag{33}$$

Il s'agit donc d'une propagation par ondes dites « rapides ».

Lorsqu'une onde est modulée par des signaux représentant une information, on peut définir une vitesse de propagation de la modulation (chap. 2 « Propagation sur une ligne de haute fréquence ») qui est la vitesse de groupe et se calcule d'après :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \tag{34}$$

En dérivant la relation $k_c^2 = (\omega^2/v^2) - \beta^2$, on trouve : $0 = 2(\omega/v^2)\, d\omega - 2\beta d\beta$

d'où l'on déduit :

$$v_g = v\frac{\lambda}{\lambda_g} \tag{35}$$

et

$$v_p\, v_g = v^2 \tag{36}$$

Puisque $v_p > v$, il en résulte que $v_g < v$.

Longueur d'onde et fréquence de coupure

- Si $f > k_c/2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}$, il y a propagation,
- Si $f < k_c/2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}$, il n'y a pas propagation.

La fréquence :

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{37}$$

apparaît donc comme une fréquence de coupure pour les guides d'ondes à section simplement connexe.

La longueur d'onde associée :

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{1}{f_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{2\pi}{k_c} \tag{38}$$

apparaît également comme une longueur d'onde de coupure telle que :

- si $\lambda < \lambda_c$, il y a propagation,
- si $\lambda > \lambda_c$, il n'y a pas propagation.

Il est important de noter que ce concept de longueur d'onde de coupure est plus général que celui de fréquence de coupure. En effet, le calcul de λ_c ne fait intervenir que k_c, valeur propre de l'équation de propagation dans le guide. Or, k_c ne dépend que de la forme et des dimensions du guide étudié et elle est indépendante du diélectrique dont ce guide est rempli.

Relation entre λ, λ_c et λ_g – Paramètre de phase

La relation $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2$, peut s'écrire :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 \tag{39}$$

d'où la relation fondamentale de la propagation guidée :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 \tag{40}$$

Le paramètre de phase $\beta = 2\pi/\lambda_g$, s'exprime d'après la formule :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \tag{41}$$

qui nous montre que le guide d'ondes est un milieu dispersif. En effet, la courbe représentative des variations de β en fonction de ω n'est pas une droite, au contraire des lignes T.E.M., et il en résulte que la vitesse de propagation v_p dépend de la fréquence.

13.3.2 Ondes TE ou TM telles que $k_c^2 < 0$

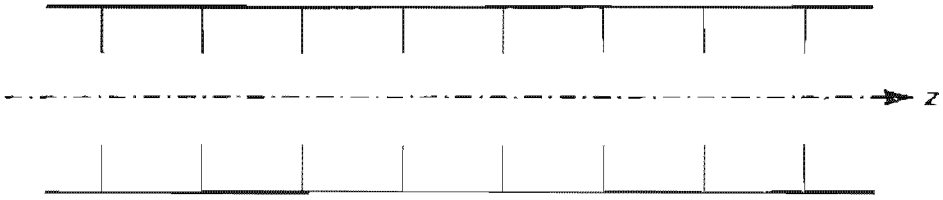


Figure 3. Représentation schématique d'un guide d'ondes chargé.

Ce cas se produit uniquement pour des guides à structure périodique. Pour la plupart de ces structures, la périodicité résulte d'une simple translation, comme cela est représenté schématiquement pour le guide d'ondes chargé de la figure 3. Les figures 4 et 5 donnent quelques exemples d'obstacles pouvant charger un tel guide d'ondes

Pour de tels guides, k_c^2 est négatif ; comme $\omega^2 \varepsilon\mu$ est positif, il en résulte que $\gamma^2 = k_c^2 - \omega^2 \varepsilon\mu$ est négatif et donc que $\gamma = j\beta$. Il y a donc une propagation sans affaiblissement qui est régie par les mêmes relations que celles du paragraphe 13.3.1b.

Comme nous traitons un cas pour lequel $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2$ est négatif, nous avons :

$$\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{v_p^2} < 0 \quad \text{d'où :} \quad v_p < v \tag{42}$$

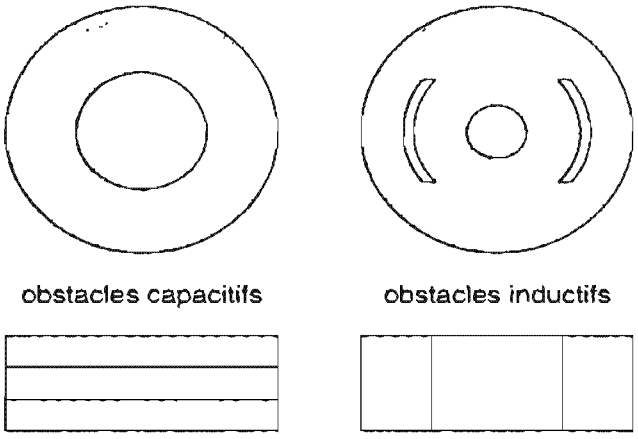


Figure 4.
Obstacles capacitifs et inductifs pouvant charger un guide d'ondes circulaire et un guide d'ondes rectangulaire.

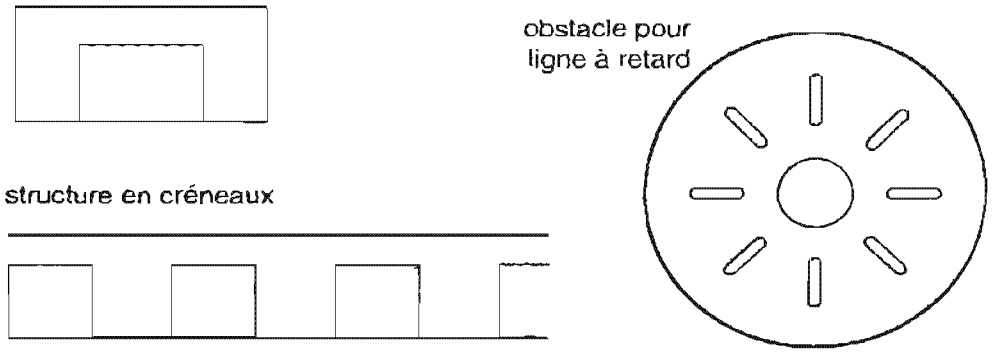


Figure 5.
Autres types d'obstacles pour guides rectangulaires et circulaires.

Il s'agit donc d'une propagation par ondes « lentes » et il n'y a pas de fréquence de coupure. Ce type de propagation qui n'existe que dans les guides d'ondes chargés a été étudié en détail par L. Brillouin *[58]* ainsi que par Collin *[59]*.

13.3.3 Cas des diélectriques à pertes

Nous ne reviendrons pas sur le cas des pertes dans les conducteurs, dont la formulation a déjà été développée au chapitre 12, paragraphe 8. Nous traiterons donc, ici, le cas où la propagation s'effectue dans un diélectrique à pertes caractérisé par une permittivité complexe $\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ et une perméabilité réelle $\mu = \mu_0$. Il résulte alors de la relation (28) que γ est complexe, de la forme $\alpha + j\beta$, et nous pouvons l'écrire : $\gamma^2 = k_c^2 - \omega^2 \underline{\varepsilon}\,\mu_0 = k_c^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \mu_0$

Soit : $$\gamma^2 = k_c^2 - k_0^2 \underline{\varepsilon}_r \tag{43}$$

D'où : $$(\alpha + j\beta)^2 = k_c^2 - k_0^2 (\varepsilon_r' - j\,\varepsilon_r'') \tag{44}$$

ou : $$-\beta^2 \left(1 - j\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = k_c^2 - k^2 \left(1 - j\frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}\right) \tag{45}$$

avec : $$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}, \quad k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon'_r}$$

La relation fondamentale de la propagation guidée s'écrit donc, lorsque l'on tient compte des pertes diélectriques :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\left(1 - j\frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2\left(1 - j\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \tag{46}$$

Nous allons calculer maintenant les expressions de α et β. Pour cela, nous séparons parties réelle et imaginaire dans (44) :

$$\alpha^2 - \beta^2 = k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r \tag{47}$$

$$2\alpha\beta = k_0^2\,\varepsilon''_r \tag{48}$$

d'où : $$\alpha^2 + \beta^2 = \pm\left|(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2\right|^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

Nous devons prendre la solution avec le signe moins afin que lorsque ε''_r et α sont nuls, on puisse retrouver la relation du cas sans perte : $(j\beta)^2 = k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r$.

Donc : $$\alpha^2 + \beta^2 = -\left|(k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r)^2 + (k_0^2\,\varepsilon''_r)^2\right|^{\frac{1}{2}} \tag{50}$$

Finalement, en faisant la somme et la différence de (47) et (50), nous pouvons calculer :

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left\{\pm(k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r) - \left|(k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r)^2 + (k_0^2\,\varepsilon''_r)^2\right|^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{51a}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\left\{\pm(k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r) - \left|(k_c^2 - k_0^2\,\varepsilon'_r)^2 + (k_0^2\,\varepsilon''_r)^2\right|^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{51b}$$

En posant : $k_0\sqrt{\varepsilon'_r} = k$ et $\varepsilon''_r/\varepsilon'_r = \operatorname{tg}\delta$, ces expressions permettent d'obtenir :

$$\alpha = \frac{k}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{k_c^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left|1 + \left(\frac{k^2}{k_c^2 - k^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\delta\right|^{\frac{1}{2}} \mp 1\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{52a}$$

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{k_c^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left|1 + \left(\frac{k^2}{k_c^2 - k^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\delta\right|^{\frac{1}{2}} \mp 1\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{52b}$$

Nous pouvons également faire apparaître les longueurs d'onde dans ces expressions puisque $k = 2\pi/\lambda$ et $k_c = 2\pi/\lambda_c$:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\delta}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mp 1\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{53a}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\delta}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mp 1\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{53b}$$

avec $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon'_r}$ et $\beta = 2\pi/\lambda_g$.

Si les pertes diélectriques sont faibles, ce qui est souvent le cas, et si λ n'est pas proche de λ_c, de telle sorte que $\operatorname{tg}\delta/(1-\lambda^2/\lambda_c^2)$ soit petit devant 1, nous aurons :

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta}{\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{54}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left|1+\frac{1}{8}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta}{\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right)^2}\right| \tag{55}$$

13.4 Les guides d'ondes rectangulaires

Le calcul de la solution générale de la propagation en guide d'ondes rectangulaire se ramène à la détermination des modes TE ou TM pouvant exister dans ce guide.

13.4.1 Détermination des modes TM

Dans ce cas, $\underline{H}_z(x, y) = 0$ et il faut trouver une fonction génératrice $\underline{E}_z(x, y)$:

- qui soit solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \underline{E}_z = 0 \tag{56}$$

- qui satisfasse à la condition aux limites $\underline{E}_z = 0$ sur les parois du guide (fig. 6), soit :

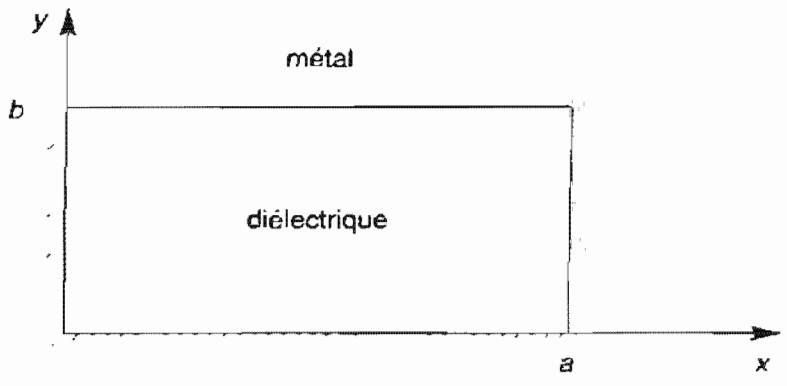


Figure 6. Notations utilisées pour le guide rectangulaire.

$$\underline{E}_z = 0 \text{ sur les plans } x = 0 \text{ et } x = a \tag{57}$$

$$\underline{E}_z = 0 \text{ sur les plans } y = 0 \text{ et } y = b \tag{58}$$

a) Recherche de la solution de (56)

Nous allons supposer que la fonction inconnue $\underline{E}_z(x, y)$ est le produit d'une fonction de x seul par une fonction de y seul :

$$\underline{E}_z(x, y) = X(x)\, Y(y) \tag{59}$$

(56) devient alors : $$X''Y + Y''X + k_c^2\, XY = 0 \tag{60}$$

En divisant par XY, nous obtenons : $\dfrac{X''}{X} + \dfrac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0$

Soit aussi : $$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - k_c^2 \tag{61}$$

Le premier membre est une fonction de x seul, le deuxième membre est une fonction de y seul ; ils ne peuvent être égaux qu'à une même constante qui devra être de même degré et de même signe que $-k_c^2$.

Posons donc : $$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \tag{62}$$

Il vient : $$-\frac{Y''}{Y} - k_c^2 = -k_x^2 \quad \text{ou} \quad \frac{Y''}{Y} = k_x^2 - k_c^2$$

Posons : $$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \tag{63}$$

avec : $$k_y^2 + k_x^2 = k_c^2 \tag{64}$$

Dans ces conditions, la solution de (56) est de la forme :

$$\underline{E}_z(x, y) = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)\,(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \tag{65}$$

b) Les constantes sont déterminées d'après les conditions aux limites

- $\underline{E}_z = 0$ pour $y = 0$ et $y = b \quad \forall\, x$

 $0 = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)\, C \quad$ d'où $\underline{C = 0}$

 $0 = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)\, D \sin k_y b$

 D ne peut être nul, sinon $E_z(x, y) = 0 \quad \forall\, x$ et y.

Donc : $$\sin k_y b = 0 \quad \text{d'où :} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \tag{66}$$

- $E_z = 0$ pour $x = 0$ et $x = a \quad \forall\, y$

 $0 = A\,(D \sin k_y y) \quad$ comme $D \neq 0$, $\underline{A = 0}$

$0 = (B \sin k_x a)\,(D \sin k_y y)$

d'où

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \tag{67}$$

Par conséquent, la fonction génératrice est donnée par :

$$\underline{E}_z(x, y) = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{68}$$

et :

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_c^2 \tag{69}$$

n et m sont deux entiers positifs quelconques.

Les composantes transversales du champ sont ensuite obtenues au moyen des formules (13), (14), (15), (16) qui se simplifient du fait que $\underline{H}_z = 0$.

$$\underline{E}_x(x, y) = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{70}$$

$$\underline{E}_y(x, y) = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{71}$$

$$\underline{H}_x(x, y) = E_0 \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{72}$$

$$\underline{H}_y(x, y) = -E_0 \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{73}$$

Remarques

Dans tous les calculs effectués dans ce paragraphe, les termes exponentiels $e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$, qui affectent tous les champs ont été sous entendus.

E_0 est une constante arbitraire dont la valeur ne pourrait être fixée qu'en connaissant la puissance transportée par le guide d'ondes.

Dans les équations (72) et (73), il est possible de remplacer $\omega\varepsilon$ par $k\sqrt{\varepsilon/\mu}$, avec $k = 2\pi/\lambda$. Il apparaît ainsi que :

$$\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = -\frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\gamma}{k} \tag{74}$$

13.4.2 Détermination des modes TE

Les composantes du champ pour les modes TE (pour lesquels $\underline{E}_z(x, y) = 0$) seront obtenues de la même manière, en recherchant par la méthode de séparation des variables une fonction $\underline{H}_z(x, y)$ satisfaisant l'équation :

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \underline{H}_z = 0 \tag{75}$$

et les conditions aux limites : $\partial \underline{H}_z / \partial n = 0$ sur les parois du guide.

La fonction génératrice que l'on obtient ainsi est :

$$\underline{H}_z(x, y) = H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{76}$$

En portant cette expression de $\underline{H}_z$ dans les formules (13), (14), (15), (16), et en tenant compte de $\underline{E}_z = 0$, on obtient les composantes transversales du champ des ondes TE.

$$\underline{E}_x(x, y) = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{77}$$

$$\underline{E}_y(x, y) = -H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{78}$$

$$\underline{H}_x(x, y) = H_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{79}$$

$$\underline{H}_y(x, y) = H_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{80}$$

Même remarque pour H_0 que pour E_0 au paragraphe 13.4.1, ainsi que pour les termes exponentiels qui sont sous-entendus. Par ailleurs, dans les équations (77) et (78), il est possible de remplacer $\omega\mu$ par $k\sqrt{\mu/\varepsilon}$ avec $k = 2\pi/\lambda$. Il apparaît ainsi que :

$$\frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{k}{\gamma} \tag{81}$$

13.4.3 Lignes de champs

Pour les ondes TE et TM les composantes des champs électrique et magnétique dépendent de deux entiers arbitraires, m et n. À tout couple de ces deux entiers correspond une onde du type TE et une onde du type TM que l'on appelle mode TE_{mn} ou TM_{mn}.

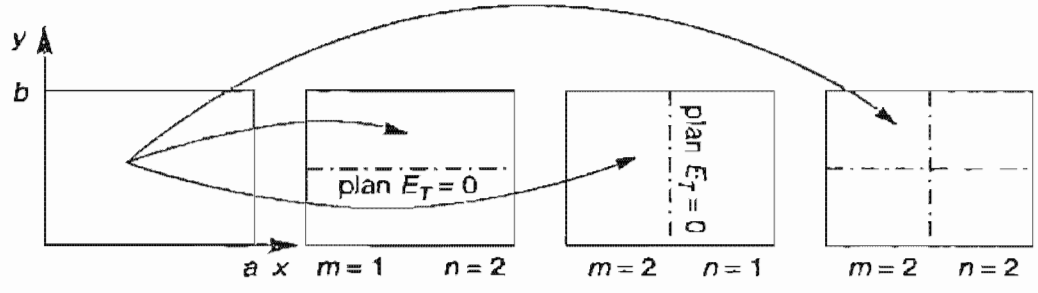


Figure 7. Coupes transversales des champs des premiers modes TE_{mn} à partir de la coupe transversale du champ du mode TE_{11}.

Pour $m = n = 1$, les composantes tangentielles du champ électrique ne peuvent s'annuler que sur les parois du guide. Par contre, si m et (ou) $n > 1$, ces composantes peuvent aussi s'annuler sur des plans méridiens, comme le montre la figure 7.

Dans chaque rectangle délimité par ces plans, la configuration du champ est analogue à celle du cas $m = n = 1$. Par exemple, pour $m = n = 2$, nous retrouvons la juxtaposition de 4 motifs élémentaires correspondant au cas $m = n = 1$. Les configurations des champs sont d'autant plus compliquées que les indices m et n ont des valeurs plus élevées.

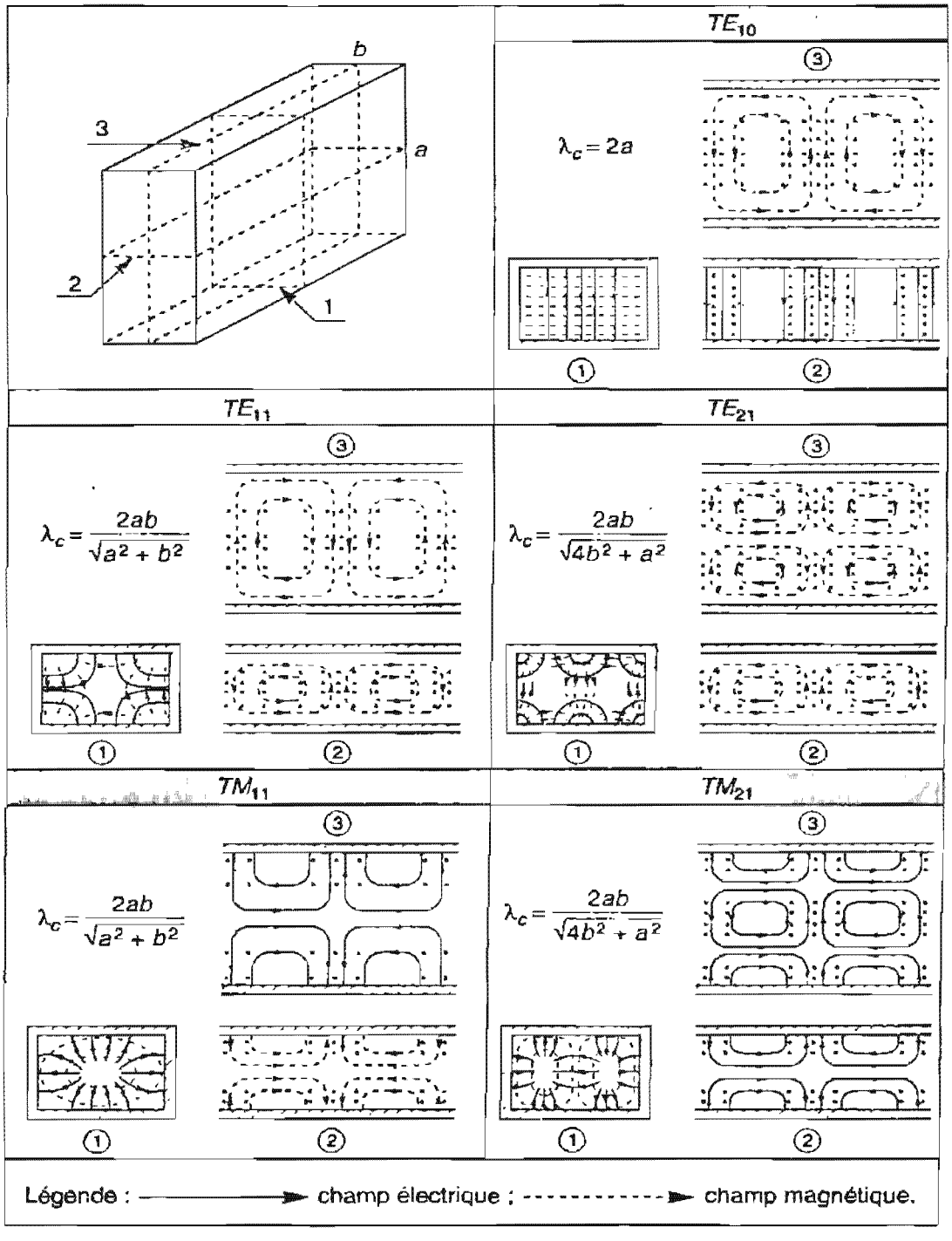


Figure 8.
Lignes de champs de quelques modes du guide d'ondes rectangulaire.

Figure extraite de Rigal et Voge, *Les Hyperfréquences*, Éditions Eyrolles (1963), p. 121.

La figure 8 représente les lignes du champ correspondant à quelques modes du guide rectangulaire, dans divers plans transversaux et longitudinaux.

Remarquons que s'il existe un mode TE_{01} ou TE_{10} (mode fondamental du guide rectangulaire), il ne peut pas exister de mode TM_{01} ou TM_{10} puisqu'alors $\underline{E}_z(x, y)$ – qui est un produit de sinus – serait nul et comme $\underline{H}_z$ l'est déjà par hypothèse, toutes les autres composantes seraient également nulles.

13.4.4 Longueur d'onde et fréquence de coupure

Nous avons vu que : $k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

Comme $k_c = 2\pi/\lambda_c$, il en résulte que la longueur d'onde et la fréquence de coupure sont données respectivement par :

$$\lambda_c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}} \tag{82}$$

$$f_c = v\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2} \tag{83}$$

13.5 LES GUIDES D'ONDES CIRCULAIRES

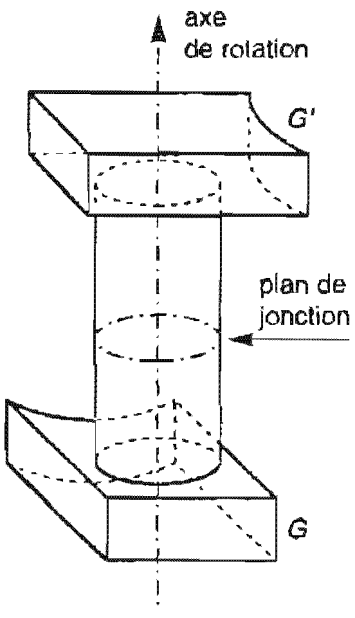


Figure 9. Joint tournant.

Pendant longtemps, les guides d'ondes circulaires n'ont servi qu'en tant qu'éléments de dispositifs tels que atténuateurs, déphaseurs (vol. 2, chap 2 « Circuits passifs réciproques »), joints tournants. Pour ces derniers (fig. 9) ils jouent le rôle d'éléments de connexion entre deux guides G et G', permettant à l'un d'eux de tourner par rapport à l'autre.

Au début des années 1970, on a envisagé de les utiliser en tant que lignes de télécommunications, d'une part parce qu'un de leurs modes de propagation présente des pertes qui diminuent quand la fréquence augmente, d'autre part parce que l'on sait éliminer les autres modes pour ne conserver que celui-là.

13.5.1 Bases théoriques

Nous utiliserons les coordonnées cylindriques (fig. 2) selon lesquelles les Δ_t des relations (27a et b) ont pour expressions : $\dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe 13.2.3 « Détermination des composantes transversales en ρ et φ », la fonction angulaire $F(\varphi)$ est prise de la forme $e^{-jn\varphi}$ et nous recherchons donc pour $\psi(\rho, \varphi) = \underline{E}_z$ ou $\underline{H}_z$ des solutions de la forme : $\psi(\rho, \varphi) = F(\rho)\, e^{-jn\varphi}$.

Les relations (27a et b) nous donnent donc :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k_c^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) F = 0 \tag{84}$$

et admettent pour solutions :

$$F(\rho) = A\, J_n(k_c \rho) + B Y_n(k_c \rho) \tag{85}$$

A et B sont les constantes d'intégration dont les valeurs seront déterminées d'après les conditions aux limites.

J_n et Y_n sont les fonctions de Bessel d'ordre n, respectivement de première et deuxième espèce.

Notons dès maintenant que ψ doit garder une valeur finie sur l'axe du guide ($\rho = 0$). Comme $Y_n(x) \to \infty$ quand $x \to 0$, la constante B doit être nulle et la solution pour ψ doit être de la forme :

$$\psi(\rho, \varphi) = A\, J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{86}$$

13.5.2 Détermination des ondes TM

Dans ce cas $H_z = 0$ et d'après (86) :

$$\underline{E}_z = E_0\, J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{87}$$

La condition aux limites sur la paroi du guide impose que $E_z = 0$ pour $\rho = a$, soit : $J_n(k_c a) = 0$. Or la figure 10 montre que la fonction $J_n(u)$ s'annule pour une suite de valeurs de u qui sont les racines de J_n. À chacune de ces racines correspond un mode de propagation. Le mode correspondant à la m^e racine d'une fonction d'ordre n est appelé mode TM_{nm}. Le tableau de la figure 11 donne les valeurs discrètes u_{nm} de ces racines. Pour ces modes TM_{nm} :

$$k_c = \frac{u_{nm}}{a} \tag{88}$$

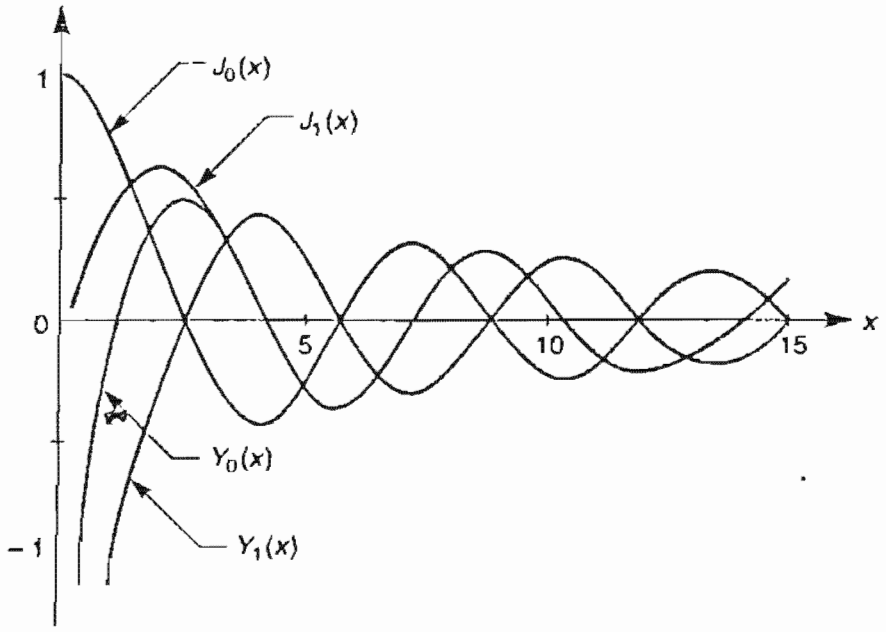


Figure 10.
Courbes de variation des fonctions J_0, J_1, Y_0 et $Y_1(X)$

En portant la fonction génératrice $\underline{E}_z$ donnée par la relation (87) dans les relations (23) à (26), nous obtenons les composantes transversales :

$$\underline{E}_\rho = -E_0 \frac{\gamma}{k_c} J_n'(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{89}$$

$$\underline{E}_\varphi = j E_0 \frac{\gamma n}{k_c^2 \rho} J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{90}$$

$$\underline{H}_\rho = E_0 \frac{\omega \varepsilon n}{k_c^2 \rho} J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{91}$$

$$\underline{H}_\varphi = -j E_0 \frac{\omega \varepsilon}{k_c} J_n'(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{92}$$

Remarque
Dans toutes ces relations, le facteur $e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$ est sous-entendu. Quant à E_0, c'est une constante arbitraire dont la valeur ne pourrait être fixée qu'en connaissant la puissance transportée par le guide d'ondes.

En remplaçant $\omega\varepsilon$ par $k\sqrt{\varepsilon/\mu}$, nous avons :

$$\frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{H}_\rho} = -\frac{\underline{E}_\rho}{\underline{H}_\varphi} = j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\gamma}{k} \tag{93}$$

13.5.3 Détermination des ondes TE

Dans ce cas, $E_z = 0$ et d'après (86) :

$$\underline{H}_z = H_0 J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{94}$$

La condition aux limites sur la paroi du guide impose que $\partial H_z/\partial n = \partial H_z/\partial \rho = 0$ pour $\rho = a$, soit $J_n'(k_c a) = 0$. La fonction $J_n(u)$ présentant une suite de maxima et

de minima, c'est pour les valeurs de u, notées u'_{nm}, correspondant à ces maxima et minima que $J'_n(u) = 0$. À chacune de ces racines de J'_n correspond un mode de propagation appelé TE_{nm}. Le tableau de la figure 11 donne les valeurs discrètes u'_{nm} de ces racines. Pour ces modes TE_{nm} :

$$k_c = \frac{u'_{nm}}{a} \tag{95}$$

En portant la fonction génératrice $\underline{H}_z$ donnée par la relation (94) dans les relations (23) à (26), nous obtenons les composantes transversales :

$$\underline{E}_\rho = - H_0 \frac{\omega \mu n}{k_c^2 \rho} J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{96}$$

$$\underline{E}_\varphi = j H_0 \frac{\omega \mu}{k_c} J'_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{97}$$

$$\underline{H}_\rho = - H_0 \frac{\gamma}{k_c} J'_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{98}$$

$$\underline{H}_\varphi = j H_0 \frac{\gamma n}{k_c^2 \rho} J_n(k_c \rho)\, e^{-jn\varphi} \tag{99}$$

Même remarque qu'au paragraphe 13.5.2 concernant H_0 et les termes exponentiels qui sont sous-entendus. Par ailleurs, en remplaçant $\omega\mu$ par $k\sqrt{\mu/\varepsilon}$, nous avons :

$$\frac{\underline{E}_\rho}{\underline{H}_\varphi} = - \frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{H}_\rho} = j \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{k}{\gamma} \tag{100}$$

13.5.4 Étude des divers modes de propagation

Nous venons de mettre en évidence que, comme dans les guides rectangulaires, la propagation dans les guides circulaires s'effectue selon différents modes TE et TM. Ces modes sont caractérisés par :

- leur configuration transversale ;
- leur longueur d'onde de coupure.

Les configurations transversales de quelques-uns de ces modes sont représentées sur la figure 11.

Les longueurs d'onde de coupure des modes TE_{nm} sont données par :

$$\lambda_{c_{TE_{nm}}} = \frac{2\pi a}{u'_{nm}} \tag{101}$$

a est le rayon intérieur du guide.

Les longueurs d'onde de coupure des modes TM_{nm} sont données par :

$$\lambda_{c_{TM_{nm}}} = \frac{2\pi a}{u_{nm}} \tag{102}$$

Les valeurs de u_{nm} et u'_{nm} sont données dans le tableau joint à la figure 11.

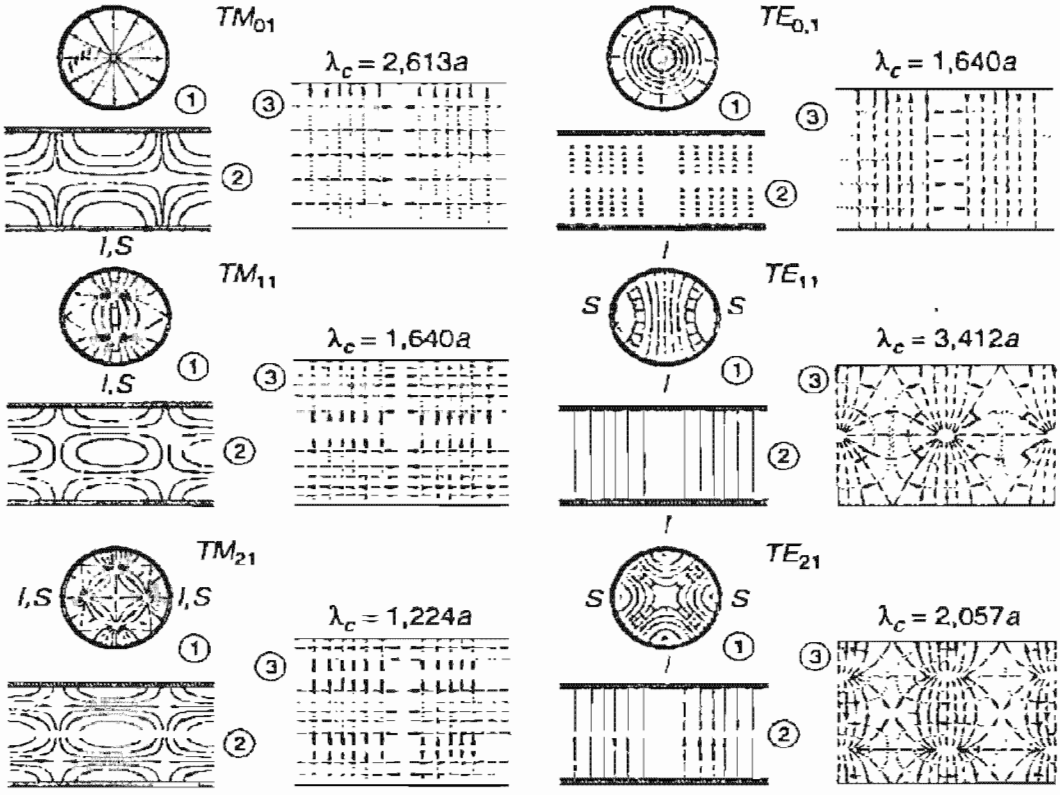


Figure 11. Lignes de champs et de courants de quelques modes des guides d'ondes circulaires.

Figure extraite de « Microwave Theory and Applications » par S.F. Adam, Éditeur Hewlett-Packard (1969), p. 62.

$u_{0,1} = 2,405$	$u_{0,2} = 5,520$	$u'_{0,1} = 3,832$	$u'_{0,2} = 7,016$
$u_{1,1} = 3,832$	$u_{1,2} = 7,016$	$u'_{1,1} = 1,841$	$u'_{1,2} = 5,332$
$u_{2,1} = 5,136$	$u_{0,3} = 8,654$	$u'_{2,1} = 3,054$	$u'_{2,2} = 6,706$
		$u'_{3,1} = 4,201$	$u'_{3,2} = 8,013$

Le mode qui apparaît le premier est celui dont la longueur d'onde de coupure est la plus grande ; c'est donc TE_{11} ($\lambda_c = 3,41a$) qui est le mode fondamental des guides d'ondes circulaires. Apparaissent ensuite, successivement, lorsque la fréquence augmente :

TM_{01} ($\lambda_c = 2,61a$)

TE_{21} ($\lambda_c = 2,05a$)

TE_{01} et TM_{11} ($\lambda_c = 1,64a$)...

Les modes TM_{01} et TE_{01} présentent une parfaite symétrie de révolution autour de l'axe du guide et leur emploi est donc particulièrement indiqué lorsque l'on doit faire tourner l'une par rapport à l'autre deux sections de guides circulaires sans perturber la propagation, comme cela est le cas dans les joints tournants pour les émetteurs radar. Le mode TM_{01} a l'avantage de pouvoir être excité simplement par un élément d'antenne placé selon l'axe du guide.

13.5.5 Étude du mode fondamental TE_{11}

La structure de ce mode – qui est caractérisée, dans un plan de section transverse, par une polarisation uniforme selon un des diamètres – correspond à la structure du mode fondamental des guides d'ondes rectangulaires. D'ailleurs, lorsque par une transition géométriquement progressive (fig. 12) on transforme un guide d'ondes rectangulaire en un guide d'ondes circulaire, c'est le mode TE_{11} qui est excité dans le guide d'ondes circulaire si le guide d'ondes rectangulaire fonctionne selon le mode fondamental TE_{10}, et réciproquement.

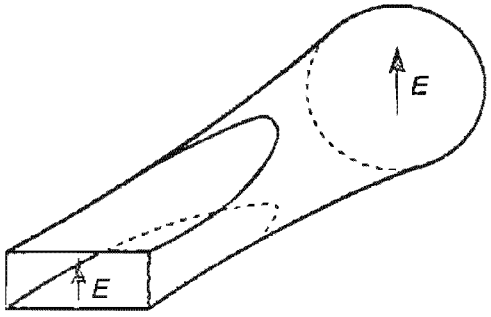


Figure 12. Transition guide rectangulaire – guide circulaire.

L'ennui est qu'à cause de la symétrie de révolution du guide circulaire, la direction de polarisation uniforme dont nous avons parlé plus haut peut tourner car il n'y a aucune direction privilégiée. Cette direction de polarisation dépend, en fait, de la polarisation du champ délivré par la sonde excitatrice, à laquelle elle est parallèle.

C'est pourquoi on préfère souvent (notamment pour les circuits d'émission et de réception des faisceaux hertziens) employer des guides d'ondes elliptiques pour lesquels la direction de polarisation est fixée, grâce à l'asymétrie du système, selon la direction du petit axe ou du grand axe de l'ellipse (fig. 13). En général, c'est la première disposition qui est utilisée.

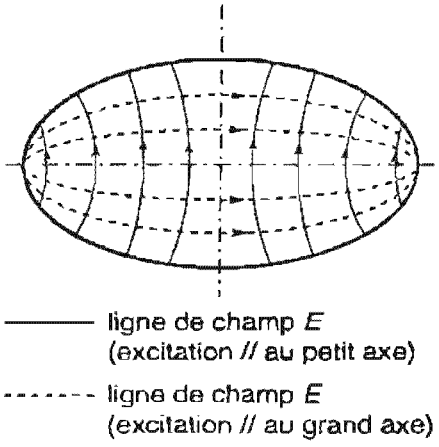


Figure 13. Guide d'ondes elliptique.

13.5.6 Atténuation en guide d'ondes circulaire

Les atténuations (en dB/m) sont données, pour les trois modes les plus importants, par :

Mode TE_{11} :

$$\alpha = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-5}}{a^{3/2}} \cdot \frac{\left(\frac{f}{f_c}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2{,}38}\left(\frac{f}{f_c}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{103}$$

α passe par un minimum pour $f/f_c = 4{,}5$.

Mode TM_{01} :

$$\alpha = \frac{6{,}3 \cdot 10^{-5}}{a^{3/2}} \cdot \frac{\left(\frac{f}{f_c}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{104}$$

α passe par un minimum pour $f/f_c = \sqrt{3}$.

Mode TE_{01} :

$$\alpha = \frac{8 \cdot 10^{-5}}{a^{3/2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{f}{f_c}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{105}$$

Ici, α diminue constamment quand f augmente.

Les variations de α en fonction de la fréquence sont représentées, pour ces trois modes, sur la figure 14. Elle met bien en évidence que, pour le mode TE_{01}, les pertes diminuent lorsque la fréquence augmente. Il est le seul parmi tous les autres modes des guides circulaires à posséder cette intéressante propriété.

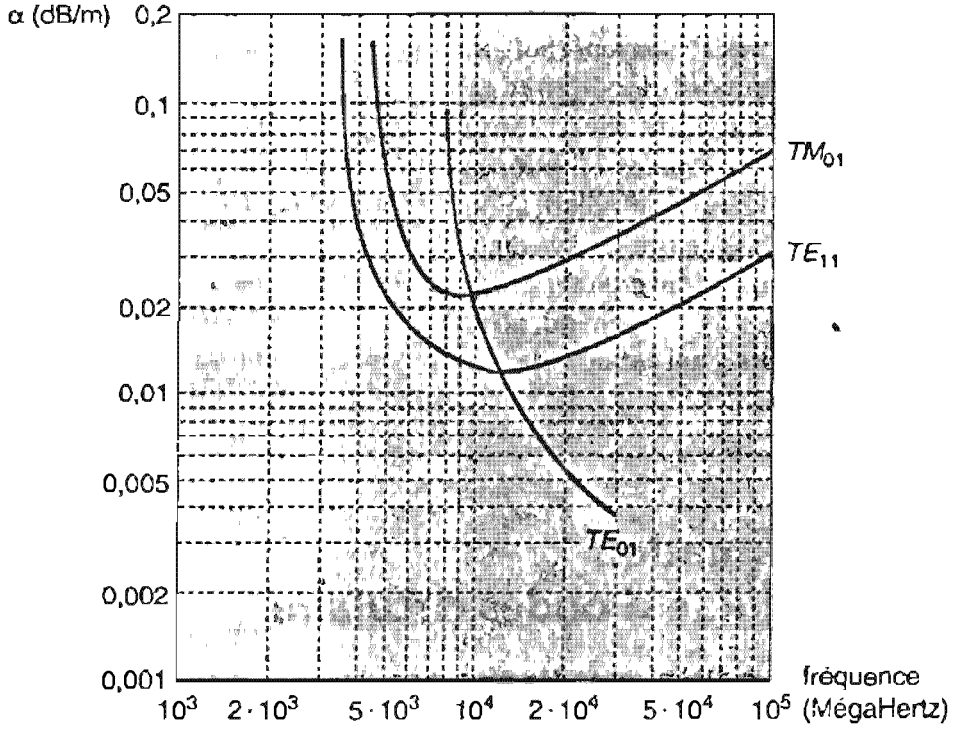


Figure 14. Courbes des variations de l'atténuation linéique en fonction de la fréquence pour les 3 modes principaux du guide d'ondes circulaire.

Physiquement, cela provient de ce qu'il est le seul dont les lignes de courant dans la paroi du guide soient situées dans des plans de section droite alors que, pour tous les autres, les lignes de courant sont longitudinales. Cette propriété permet d'ailleurs d'éliminer les autres modes en ne conservant que le mode TE_{01} : il suffit, pour cela, que le revêtement intérieur du guide, au lieu d'être lisse, soit constitué par des spires en cuivre jointives, recouvertes d'un vernis qui les isole les unes des autres ; tous les modes dont les lignes de courant sont longitudinales peuvent ainsi être stoppés tandis que le mode TE_{01} n'est pas affecté.

C'est selon ce principe qu'avaient été développés, lors des années 1970, des projets de transmission à moyenne et grande distance par guides circulaires « hélicoïdaux ». La solution retenue en France était un guide de 50 mm de diamètre présentant des pertes de 3 dB/km à 35 GHz. Mais l'augmentation du coût de la matière première (cuivre) et les promesses apportées par les transmissions sur fibres optiques – dont la matière première (silice) est bon marché – ont entraîné l'abandon de ces projets.

13.6 ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA RÉFLEXION DES ONDES GUIDÉES

13.6.1 Définition d'une onde de référence

Nous allons exprimer, par référence à une onde unité (onde transportant une puissance de 1/2 Watt), les résultats obtenus dans l'étude des lignes T.E.M. (chap. 2 « Propagation sur une ligne en haute fréquence » et chap. 3 « Étude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne ») à partir des concepts tension et courant aussi bien que dans l'étude des guides d'ondes (chap. 12 « Les guides d'ondes rectangulaires » et chap. 13) à partir des concepts champs électrique et magnétique.

Nous montrerons ainsi que, dans le cas général du régime d'ondes semi-stationnaires, les expressions de $\underline{V}(z)$ et $\underline{I}(z)$ pour les lignes T.E.M. ainsi que celles de $\underline{E}_t(x, y, z)$ et $\underline{H}_t(x, y, z)$ pour les guides d'ondes, peuvent être écrites sous la forme du produit de deux facteurs :

- l'un, qui est relatif à l'onde unité écrite en fonction de $\underline{V}$, $\underline{I}$ ou de $\underline{E}_t$, $\underline{H}_t$ selon le cas considéré,
- l'autre, qui est identique dans les deux cas et qui ne dépend que du paramètre de propagation γ et des caractéristiques de la charge de la ligne ou du guide d'ondes.

13.6.2 Caractérisation de la réflexion en lignes T.E.M.

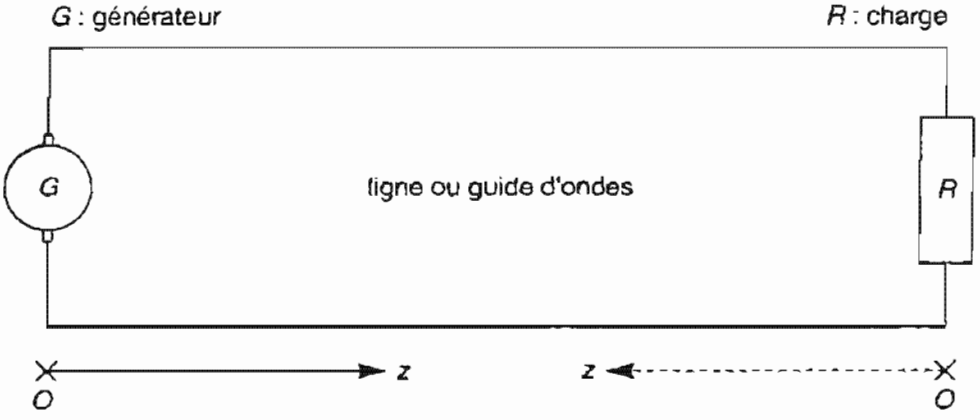


Figure 15. Conventions de choix de l'origine et de l'orientation de l'axe des z.

a) L'onde progressive unité

Si l'axe des abscisses est orienté du générateur vers la charge (fig. 15) :

$$\underline{V}(z) = \underline{V}_0 \, e^{-\gamma z} \tag{106}$$

et

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_0 \, e^{-\gamma z} \tag{107}$$

Il est possible de définir une onde unité :

$$\underline{V}^u(z) = \underline{V}_0^u \, e^{-\gamma z} \tag{108}$$

et

$$\underline{I}^u(z) = \underline{I}_0^u \, e^{-\gamma z} \tag{109}$$

telle que :

$$\frac{1}{2} \underline{V}_0^u (\underline{I}_0^u)^* = \frac{1}{2} \text{ Watt} \tag{110}$$

b) Le régime d'ondes semi-stationnaires

Un tel régime peut toujours être considéré comme la superposition d'une onde progressive incidente, se déplaçant du générateur vers la charge, et d'une onde progressive réfléchie, se déplaçant en sens inverse :

- si l'axe des abscisses est orienté du générateur vers la charge (fig. 15) :

$$\underline{V}(z) = \underline{V}_i \, e^{-\gamma z} + \underline{V}_r \, e^{\gamma z} \tag{111}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_i \, e^{-\gamma z} + \underline{I}_r \, e^{\gamma z} \tag{112}$$

avec :

$$\frac{\underline{V}_i}{\underline{I}_i} = -\frac{\underline{V}_r}{\underline{I}_r} \tag{113}$$

- si l'axe des abscisses est orienté de la charge vers le générateur :

$$\underline{V}(z) = \underline{V}_i \, e^{\gamma z} + \underline{V}_r \, e^{-\gamma z} \tag{114}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_i \, e^{\gamma z} + \underline{I}_r \, e^{-\gamma z} \tag{115}$$

Exprimons, dans ce dernier cas, les ondes progressives incidente et réfléchie par référence à l'onde progressive unité :

- pour l'onde incidente, il est possible d'introduire un facteur $\underline{A}$ tel que :

$$\underline{V}_i\, e^{\gamma z} = \underline{A}\, \underline{V}_0^u\, e^{\gamma z} \tag{116}$$

$$\underline{I}_i\, e^{\gamma z} = \underline{A}\, \underline{I}_0^u\, e^{\gamma z} \tag{117}$$

- pour l'onde réfléchie, il est possible d'introduire un facteur $\underline{B}$ tel que :

$$\underline{V}_r\, e^{-\gamma z} = \underline{B}\, \underline{V}_0^u\, e^{-\gamma z} \tag{118}$$

$$\underline{I}_r\, e^{-\gamma z} = -\underline{B}\, \underline{V}_0^u\, e^{-\gamma z} \tag{119}$$

NB

Nous avons affecté cette dernière expression d'un signe moins puisque :

$$\underline{V}_r/\underline{I}_r = -\underline{V}_i/\underline{I}_i.$$

Dans ces conditions, l'onde semi-stationnaire s'écrit :

$$\underline{V}(z) = \underline{V}_0^u\, (\underline{A}\, e^{\gamma z} + \underline{B}\, e^{-\gamma z}) \tag{120}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_0^u\, (\underline{A}\, e^{\gamma z} - \underline{B}\, e^{-\gamma z}) \tag{121}$$

13.6.3 Caractérisation de la réflexion en guides d'ondes

a) L'onde progressive unité

Les champs constituant l'onde électromagnétique (axe des z orienté du générateur vers la charge) ont :

- pour le modes TE et TM, des composantes transversales de la forme :

$$\underline{E}_t = \underline{E}_t(q_1, q_2)\, e^{-\gamma z} \tag{122}$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_t(q_1, q_2)\, e^{-\gamma z} \tag{123}$$

- pour le mode TE, une composante longitudinale du champ H de la forme :

$$\underline{H}_z = \underline{H}_z(q_1, q_2)\, e^{-\gamma z} \tag{124}$$

- pour le mode TM, une composante longitudinale du champ E de la forme :

$$\underline{E}_z = \underline{E}_z(q_1, q_2)\, e^{-\gamma z} \tag{125}$$

Nous avons établi qu'il y avait propagation selon l'axe Oz d'un régime d'ondes progressives. La densité de puissance active (W/m^2) transportée est :

$$\vec{P}_z = \frac{1}{2}\, \vec{\underline{E}}_t \wedge \vec{\underline{H}}_t^* = \frac{1}{2}\, \underline{E}_t \underline{H}_t^*\, \vec{z} \tag{126}$$

Cette relation est vraie quelle que soit la base de décomposition choisie pour $\vec{E}_t$, $\vec{H}_t$ ($q_1 = x$, $q_2 = y$ en cartésiennes ou $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$ en polaires).

Remarque
Puisque les composantes longitudinales n'interviennent pas pour définir la puissance active, nous ne nous intéresserons désormais qu'aux composantes transversales de ces champs.

À travers la section droite du guide, la puissance active est :

$$P = \frac{1}{2}\iint_S \underline{E}_t \underline{H}_t^* \, dS = \frac{e^{-2\alpha z}}{2}\iint_S \underline{E}_t(q_1, q_2)\,\underline{H}_t^*(q_1, q_2)\, dS \qquad (127)$$

Il existe des valeurs $\underline{E}_t^u$ et $\underline{H}_t^u$ de $\underline{E}_t$ et $\underline{H}_t$ telles que, pour $\alpha z = 0$, cette puissance active transportée est égale à 1/2 Watt. L'onde ainsi définie est l'onde unité. Elle est constituée par les champs :

$$\underline{E}_t^u = \underline{E}_t^u(q_1, q_2)\, e^{-\gamma z} \qquad (128)$$

$$\underline{H}_t^u = \underline{H}_t^u(q_1, q_2)\, e^{-\gamma z} \qquad (129)$$

b) Le régime d'ondes semi-stationnaires

Nous écrirons les ondes incidente et réfléchie composant ce régime par référence à l'onde unité, mais nous orienterons maintenant l'axe des abscisses de la charge vers le générateur (fig. 15).

- Pour l'onde incidente, nous introduirons un facteur $\underline{A}$ tel que :

$$\underline{E}_t^i = \underline{A}\,\underline{E}_t^u\, e^{\gamma z} \qquad (130)$$

et

$$\underline{H}_t^i = \underline{A}\,\underline{H}_t^u\, e^{\gamma z} \qquad (131)$$

- Pour l'onde réfléchie, nous introduirons un facteur $\underline{B}$ tel que :

$$\underline{E}_t^r = \underline{B}\,\underline{E}_t^u\, e^{-\gamma z} \qquad (132)$$

et

$$\underline{H}_t^r = -\underline{B}\,\underline{H}_t^u\, e^{-\gamma z} \qquad (133)$$

NB

$(\vec{E}_t^i, \vec{H}_t^i, -\vec{z})$ *et* $(\vec{E}_t^r, \vec{H}_t^r, \vec{z})$ *doivent former des trièdres directs, par conséquent :*

$$\frac{\underline{E}_t^i}{\underline{H}_t^i} = -\frac{\underline{E}_t^r}{\underline{H}_t^r} \qquad (134)$$

Les champs de l'onde semi-stationnaire s'écriront enfin :

$$\underline{E}_t = \underline{E}_t^u(q_1, q_2)\,[\underline{A}\, e^{\gamma z} + \underline{B}\, e^{-\gamma z}] \qquad (135)$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_t^u(q_1, q_2)\,[\underline{A}\, e^{\gamma z} - \underline{B}\, e^{-\gamma z}] \qquad (136)$$

13.6.4 Définition d'un coefficient de réflexion généralisé

Grâce au concept d'onde unité que nous venons d'introduire, il a été possible d'écrire :

- les tensions et courants pour les lignes T.E.M (relations (120) et (121)),
- les champs $\underline{E}_t$ et $\underline{H}_t$ pour les guides d'ondes (relations (135 et (136)), comme étant le produit de deux facteurs dont l'un ne dépend pas du tout de la charge

alors que l'autre contient les termes $\underline{A}$ et $\underline{B}$ qui vont permettre de la caractériser.

Pour faire l'étude de la réflexion, nous nous intéresserons donc, dans tous les cas, aux facteurs :

$$\underline{A}\, e^{\gamma z} + \underline{B}\, e^{-\gamma z} = \underline{U} \qquad (137)$$

$$\underline{A}\, e^{\gamma z} - \underline{B}\, e^{-\gamma z} = \underline{J} \qquad (138)$$

Nous aurons toujours à l'esprit la signification de $\underline{U}$ et $\underline{J}$:

- pour les lignes T.E.M. :

$$\underline{U} = \frac{\underline{V}(z)}{\underline{V}_0^u} \qquad (139) \qquad \text{et} \qquad \underline{J} = \frac{\underline{I}(z)}{\underline{I}_0^u} \qquad (140)$$

dans ce cas : $\gamma = \alpha + j\beta$ avec $\beta = 2\pi/\lambda$;

- pour les guides d'ondes :

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_t^u} \qquad (141) \qquad \text{et} \qquad \underline{J} = \frac{\underline{H}_t}{\underline{H}_t^u} \qquad (142)$$

dans ce cas : $\gamma = \alpha + j\beta$ avec $\beta = 2\pi/\lambda_g$.

Le rapport :

$$\frac{\underline{B}\, e^{-\gamma z}}{\underline{A}\, e^{\gamma z}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}\, e^{-2\gamma z} = \underline{\Gamma}(z) \qquad (143)$$

quotient de l'onde réfléchie du type U par l'onde incidente de même type, apparaît comme le coefficient de réflexion dans un plan d'abscisse z. Ce rapport a pour valeur $\underline{B}/\underline{A}$ dans le cas particulier où $z = 0$. C'est le coefficient de réflexion de la charge $\underline{\Gamma}(0) = \underline{\Gamma}_R$.

Comme $\underline{\Gamma}_R$ est un nombre complexe de la forme $\Gamma_R\, e^{j\phi}$:

$$\underline{\Gamma}(z) = \Gamma_R\, e^{-2\alpha z}\, e^{j(\phi - 2\beta z)} \qquad (144)$$

Remarque

C'est par convention que le coefficient de réflexion a été défini à partir d'une onde de type U, *c'est-à-dire de tension ou de champ électrique. S'il avait été défini à partir d'une onde de type* J, *c'est-à-dire de courant ou de champ magnétique, son signe aurait été changé.*

13.7 LES CONCEPTS D'IMPÉDANCE, D'IMPÉDANCE D'ONDE ET D'IMPÉDANCE RÉDUITE

13.7.1 L'impédance en lignes T.E.M.

Dans ce cas, les expressions de U et J sont équivalentes à :

$$\underline{V}(z) = \underline{V}_0'' \, \underline{A} \, e^{\gamma z}(1 + \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}) \tag{145}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_0'' \, \underline{A} \, e^{\gamma z}(1 - \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}) \tag{146}$$

dont le quotient est :

$$Z(z) = Z_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}}{1 - \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}} \tag{147}$$

$Z(z)$ est l'impédance en un point de la ligne,
Z_c est l'impédance caractéristique de la ligne,

$$Z_R = Z_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_R}{1 - \underline{\Gamma}_R} \tag{148}$$

est l'impédance de charge pour $z = 0$.

Rappelons la formule de transformation des impédances :

$$Z(z) = Z_c \frac{Z_R + Z_c \, \text{th} \, \gamma z}{Z_c + Z_R \, \text{th} \, \gamma z} \tag{149}$$

Pour les lignes T.E.M., ces notions d'impédance ont une signification puisqu'il est toujours possible de définir :

- le courant en un point d'abscisse z d'un conducteur,
- la tension dans un plan d'abscisse z de la ligne comme la tension existant entre les deux conducteurs de la ligne bifilaire ou entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur de la ligne coaxiale (dans ce dernier cas, quelque soit le couple de points choisi, le résultat est toujours le même).

13.7.2 L'impédance d'onde en guides d'ondes

Dans ce cas, les expressions de U et J sont équivalentes à :

$$\underline{E}_t(z) = \underline{E}_t'' \, \underline{A} \, e^{\gamma z}(1 + \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}) \tag{150}$$

$$\underline{H}_t(z) = \underline{H}_t'' \, \underline{A} \, e^{\gamma z}(1 - \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}) \tag{151}$$

dont le quotient est :

$$\underline{\zeta}(z) = \zeta_{\substack{\text{TE} \\ \text{TM}}} \frac{1 + \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}}{1 - \underline{\Gamma}_R \, e^{-2\gamma z}} \tag{152}$$

$\underline{\zeta}(z)$ est l'impédance d'onde en un point de la ligne,

$\zeta_{\substack{\text{TE}\\\text{TM}}}$ est l'impédance d'onde propre au mode TE ou TM,

$$\underline{\zeta}(0) = \underline{\zeta}_R = \zeta_{\substack{\text{TE}\\\text{TM}}} \frac{1 + \underline{\Gamma}_R}{1 - \underline{\Gamma}_R} \tag{153}$$

est l'impédance d'onde au niveau de charge ($z = 0$).

À partir de (152) et (153), on démontre la formule de transformation des impédances d'onde :

$$\underline{\zeta}(z) = \zeta_{\substack{\text{TE}\\\text{TM}}} \frac{\underline{\zeta}_R + \zeta_{\substack{\text{TE}\\\text{TM}}} \operatorname{th} \gamma z}{\zeta_{\substack{\text{TE}\\\text{TM}}} + \underline{\zeta}_R \operatorname{th} \gamma z} \tag{154}$$

La comparaison des formules (152) et (147) ou celle des formules (154) et (149), nous montre qu'*en guides d'ondes, c'est l'impédance d'onde qui joue le même rôle que l'impédance pour les lignes T.E.M.* En effet, le concept d'impédance au sens classique (rapport tension/courant) n'a pas de signification physique en guides d'ondes : si le courant en un point d'abscisse z peut être défini comme la circulation du champ magnétique le long du contour du guide, par contre la tension dans un plan de section transverse ne peut pas être définie d'une façon unique, en raison de l'ambiguïté sur le choix du couple de points entre lesquels elle doit être déterminée.

En guide d'ondes, on peut donc utiliser le formalisme établi en lignes T.E.M., à condition d'y remplacer l'impédance par l'impédance d'onde. En particulier, l'impédance d'onde TE ou TM doit être substituée à l'impédance caractéristique d'une ligne. Cependant, alors que l'impédance caractéristique d'une ligne T.E.M. est propre à cette ligne, l'impédance d'onde d'un guide est propre à un type de propagation TE ou TM dans ce guide et, plus spécifiquement encore, à l'ordre *mn* du mode qui s'y propage. *Il n'est donc pas possible, en toute rigueur, de parler d'impédance caractéristique d'un guide d'ondes.*

13.7.3 L'impédance réduite

La seul quantité qui ait la même signification physique – car directement et uniquement liée au coefficient de réflexion – aussi bien pour les lignes T.E.M. que pour les guides d'ondes, est :

$$\frac{1 + \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma z}}{1 - \underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma z}} \tag{155}$$

- pour les lignes T.E.M. elle est le quotient $Z(z)/Z_c$,
- pour les guides d'ondes, elle est le quotient $\underline{\zeta}(z)/\zeta_{\text{TE ou TM}}$.

Elle est appelée impédance réduite. Son nom, qui est lié à la façon dont elle est généralement introduite, ne doit pas faire oublier qu'il s'agit d'un nombre sans dimension et d'un concept qui n'a rien à voir avec le concept classique d'impédance.

Nous noterons cette impédance réduite par un z minuscule souligné d'une part parce que c'est, en général, une quantité complexe, d'autre part afin d'éviter toute confusion avec la coordonnée z qui repère un point de la ligne ou du guide.

Comme $\underline{\Gamma}_R e^{-2\gamma z} = \underline{\Gamma}(z)$, la relation (155) s'écrit :

$$\underline{z} = \frac{1 + \underline{\Gamma}(z)}{1 - \underline{\Gamma}(z)} \tag{156}$$

Si nous nous plaçons en $z = 0$, sur la charge, nous avons :

$$\underline{z}_R = \frac{1 + \underline{\Gamma}_R}{1 - \underline{\Gamma}_R} \tag{157}$$

On peut aussi exprimer $\underline{\Gamma}$ ou $\underline{\Gamma}_R$ en fonction de z :

(156) $\rightarrow$

$$\underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} \tag{158}$$

(157) $\rightarrow$

$$\underline{\Gamma}_R = \frac{\underline{z}_R - 1}{\underline{z}_R + 1} \tag{159}$$

Rappelons que ces relations sont à la base du diagramme de Smith qui a été étudié au chapitre 4 « Diagramme de Smith ».

EXERCICES

EXERCICE 13.1

(Paragraphe 13.3.1 – Ondes TE ou TM telles que $k_c^2 > 0$)

Une onde de fréquence $f = 3$ GHz, traversant une section de guide d'ondes de longueur $\ell = 2$ cm, rempli d'un diélectrique de permittivité relative ε_r, subit un déphasage de 288°. On sait, de plus, que la fréquence de coupure du guide d'ondes vide est de 9 GHz. Quelle est la valeur de ε_r ?

EXERCICE 13.2

(Paragraphe 13.4 – Les guides d'ondes rectangulaires)

Le guide d'ondes standard français de la bande X (8,2-12,4 GHz) avait pour dimensions : $a = 20$ mm et $b = 10$ mm. Supposons que ce guide soit rempli d'un diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 2{,}56$.

1) Trouver par le calcul les modes TE propagatifs jusqu'à 15 GHz.

2) Retrouver ce résultat par une méthode graphique, en portant en abscisses (ordonnées) les points représentatifs du rapport m/a (n/b) et en traçant les droites passant par ces points.

EXERCICE 13.3

(Paragraphe 13.4 – Les guides d'ondes rectangulaires)

Quelle est la bande passante maximale d'un guide rectangulaire en mode fondamental, sachant que ses dimensions ne peuvent être inférieures à $\lambda/2$. Pour avoir une telle bande, quelle relation doit-il y avoir entre les dimensions a et b du guide ?

EXERCICE 13.4

(Paragraphe 13.4 – Les guides d'ondes rectangulaires)

On considère un guide d'ondes rectangulaire dont les dimensions a et b sont très voisines et telles que : $a \geqslant b$. Ce guide est excité simultanément en polarisations horizontale et verticale.

1) a) Entre quelles limites doivent être comprises les dimensions a et b de ce guide pour qu'une onde occupant la bande de fréquences $(f_1, f_2 > f_1)$ puisse s'y propager selon les deux modes fondamentaux TE_{10} et TE_{01}, à l'exclusion de tous les modes d'ordre supérieur.

 b) Quelle relation doit-il y avoir entre f_1 et f_2 pour que le problème soit possible ? Montrer que le choix de $a = 1{,}8$ cm et $b = 1{,}7$ cm est bien justifié si l'on prend $f_1 = 9$ GHz et $f_2 = 11$ GHz.

2) a) À une fréquence f, quel déphasage un tronçon de ce guide, de longueur L, introduit-il entre les deux composantes des champs $\vec{E}$ qui se propagent ?

 b) Quelle doit être sa longueur L_0 pour qu'à une fréquence $f_0 = 10$ GHz, il produise une onde à polarisation circulaire ?

EXERCICE 13.5

(Paragraphe 13.5 – Les guides d'ondes circulaires)

1) Rayon a d'un guide d'ondes circulaire pour qu'il ne propage que le mode fondamental TE_{11} de 16 à 18 GHz.

2) On prend a = 0,6 cm. Quels sont les modes qui peuvent se propager jusqu'à 35 GHz ?

EXERCICE 13.6

(Paragraphe 13.5 – Les guides d'ondes circulaires)

Un guide d'ondes circulaire est excité de telle sorte que seuls des modes TM peuvent s'y propager.

1) À 10 GHz, déterminer entre quelles limites doit être compris le rayon a de ce guide pour qu'il ne s'y propage que le mode TM_{01}.

2) On choisit a = 1,5 cm. Quelle est la bande passante de ce mode TM_{01} ?

EXERCICE 13.7

(Paragraphe 13.7 – Le concept d'impédance, d'impédance d'onde et d'impédance réduite)

Le guide d'ondes standard de la bande X (a = 22,86 mm, b = 10,16 mm) est alimenté par un générateur de fréquence 10 GHz et est terminé par un court-circuit.

Dans une première expérience, ce guide est rempli d'air et l'on pointe la position d'un minimum nul de champ électrique à une distance z_m du court-circuit pris pour origine.

Dans une seconde expérience, on place contre le court-circuit un morceau de diélectrique sans perte qui remplit complètement le guide sur une longueur ℓ = 1,5 cm. Soient $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$ et $\mu = \mu_0$ les paramètres caractéristiques de ce diélectrique. On retrouve un minimum nul de champ électrique en se déplaçant de d = 0,97 cm vers le générateur à partir du précédent minimum.

1) Quelles sont les expressions des impédances d'onde du mode fondamental TE_{10} dans la partie où le guide est rempli d'air (soit ζ_{10}^{a}) et dans la partie où il est rempli de diélectrique (soit ζ_{10}^{d}), en fonction de μ_0, ε_0, λ_0, ε_r, λ et λ_c.

2) Dans le cas où le guide est totalement rempli d'air, déterminer $\underline{\zeta}(z)$ et la distance z_m.

3) Dans le cas où le guide est partiellement rempli de diélectrique :

 a) Déterminer $\underline{\zeta}(\ell)$ à l'interface diélectrique-air.

 b) Déterminer $\underline{\zeta}(s + \ell)$ à une distance s de cette interface dans le tronçon rempli d'air.

4) Écrire la condition qui est imposée à $\underline{\zeta}(s + \ell)$ en un minimum nul de champ électrique. En déduire la valeur de ε_r.

Chapitre 14

Les guides d'ondes diélectriques

14.1 INTRODUCTION

De même qu'il existe des guides d'ondes « métalliques » où les ondes électromagnétiques (O.E.M.) se propagent à l'intérieur d'un diélectrique délimité par une enveloppe métallique, il existe aussi des guides d'ondes « diélectriques » où les O.E.M. se propagent à l'intérieur d'un diélectrique délimité par une enveloppe constituée par un autre diélectrique (fig. 1).

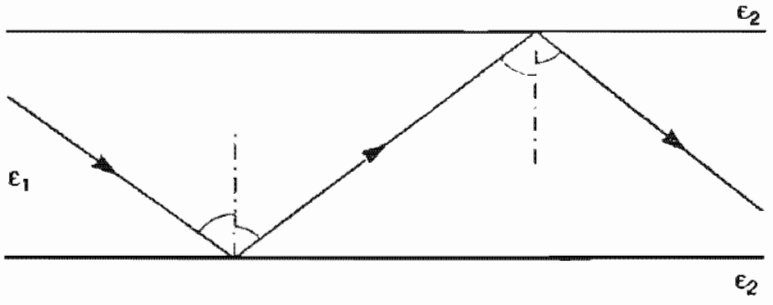


Figure 1.
Propagation dans un guide diélectrique.

Les guides diélectriques sont, en général, constitués par des cylindres de diélectrique (fig. 2) dont la permittivité ε_1 est supérieure à la permittivité ε_2 du milieu extérieur. La partie centrale est appelée le cœur (*core*, en anglais) tandis que la partie située autour est appelée la gaine (en anglais, *cladding*).

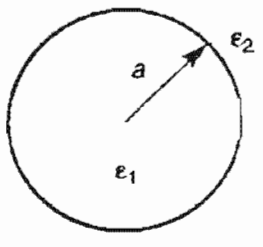


Figure 2.
Coupe transversale.

Rappelons que la permittivité absolue ε et la permittivité relative ε_r d'un milieu diélectrique sont liées par la relation $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ dans laquelle ε_0 (F/m) $= 1/(36\pi \cdot 10^9)$ est la permittivité absolue de l'air ou du vide.

D'autre part, la racine carrée de la permittivité relative d'un milieu est son indice de réfraction n :

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{1}$$

Dans ce chapitre, nous utiliserons indifféremment l'un ou l'autre.

Rappelons aussi que la longueur d'onde dans un diélectrique de permittivité ε_r se calcule d'après :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{n} \tag{2}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}, \quad \text{avec } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \tag{3}$$

est la longueur d'onde dans l'air ou le vide. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, nous la noterons toujours λ_0 ; nous réserverons la notation λ à la longueur d'onde dans un diélectrique autre que l'air.

Dans ce chapitre, nous étudierons la propagation à l'intérieur des guides d'ondes diélectriques en utilisant soit le concept de rayons (§ 14.2, 14.4 et 14.5) soit le concept d'ondes (§ 14.3, 14.6 et 14.7). Nous verrons qu'il s'agit d'une propagation par modes, comme pour la propagation en guides d'ondes métalliques.

La fréquence de fonctionnement optimale se situant dans le domaine des fréquences optiques, on a donné aux réalisations technologiques de ces guides diélectriques, le nom de fibres optiques.

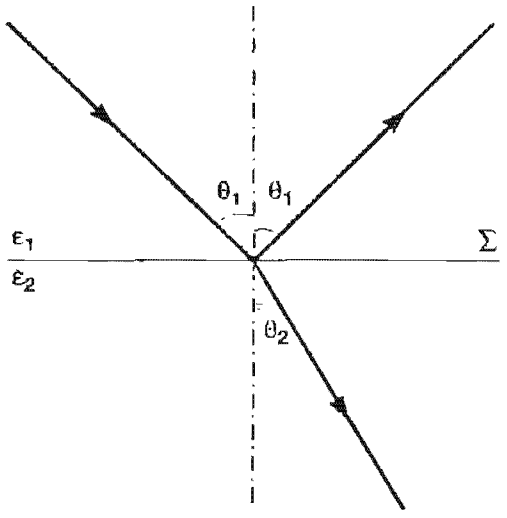
14.2 PROPAGATION EN GUIDES DIÉLECTRIQUES À STRUCTURE PLANE

14.2.1 Réflexion sur une interface plane entre deux diélectriques

Considérons deux milieux diélectriques de permittivités ε_1 et ε_2, séparés par une surface plane Σ (fig. 3). Soient θ_1 et θ_2 les angles que font les directions de propagation des ondes, dans chacun de ces milieux, par rapport à la normale à Σ.

Nous résumons ci-après les résultats démontrés au paragraphe 11.4 « Réflexion et transmission à l'interface de deux diélectriques » dans les deux cas fondamentaux de polarisation :

- Cas TE où $\vec{E}$ est perpendiculaire (et $\vec{H}$ parallèle) au plan d'incidence.
- Cas TM où $\vec{H}$ est perpendiculaire (et $\vec{E}$ parallèle) au plan d'incidence.



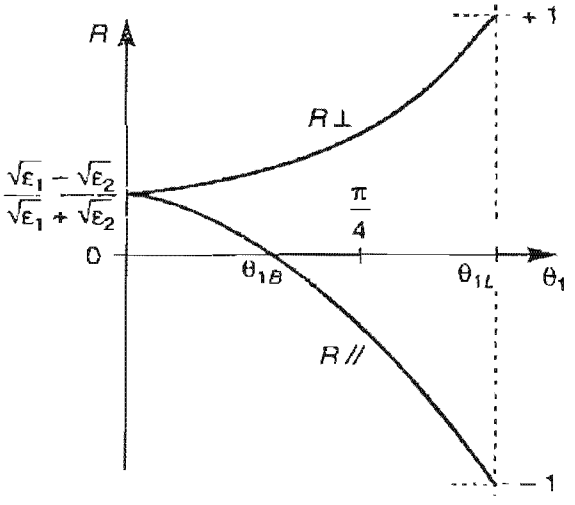


Figure 3.
Réfraction et réflexion à l'interface de deux milieux diélectriques.

Figure 4.
Variations de $R_\perp$ et $R_{//}$ pour $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1L}$.

Le coefficient de réflexion du champ $\vec{E}$ est donné respectivement par :

$$R_\perp = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2} \quad \text{dans le cas TE} \tag{4}$$

$$R_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_2 + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_1} \quad \text{dans le cas TM} \tag{5}$$

D'après la loi de Descartes :

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2 \tag{6}$$

Si $\epsilon_1 > \epsilon_2$, cela implique que $\theta_1 < \theta_2$. Les limites de variation de θ_1 et θ_2 sont donc : $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1L}$ et $0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$.

L'angle θ_{1L} est donné par : $$\sin\theta_{1L} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{7}$$

- Si $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $$R_\perp = R_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} > 0 \tag{8}$$
- Si $\theta_1 = \theta_{1L}$ et $\theta_2 = \pi/2$, $R_\perp = +1$ et $R_{//} = -1$.

La figure 4 montre les variations de $R_\perp$ et $R_{//}$ quand θ_1 varie entre 0 et θ_{1L}. Nous notons qu'il y a une valeur de θ_1 pour laquelle $R_{//} = 0$: c'est l'incidence Brewsterienne correspondant à $\theta_{1B} = \text{arctg}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$. D'autre part, pour l'angle

$$\theta_{1L} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{9}$$

il y a réflexion totale dans les deux polarisations.

Considérons (fig. 1) une couche de diélectrique de permittivité ε_1, entourée par deux autres couches de permittivité $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Si $\theta_1 \geq \theta_{1L}$, nous pouvons donc avoir propagation par réflexions successives à l'interface entre les deux couches de diélectrique. C'est le principe des guides d'ondes diélectriques.

14.2.2 Les modes de propagation

La condition de propagation guidée $\theta_1 \geq \theta_{1L}$ est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.

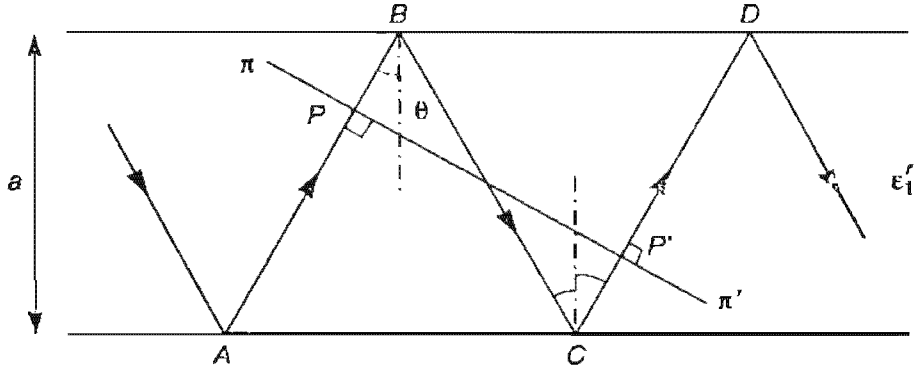


Figure 5. Plans d'onde π et π' correspondant aux directions de propagation *AB* et *CD*.

Considérons, en effet, deux directions de propagation parallèles (fig. 5) telles que *AB* et *CD* et deux plans d'onde π et π', relatifs à ces deux directions, qui sont confondus. Pour que les champs correspondant à ces plans d'onde s'additionnent et donnent donc lieu à propagation, il faut qu'ils soient déphasés de $2m\pi$. Or, le déphasage dû au parcours *PBCP'* est :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_1}(2a\cos\theta) = \frac{4\pi a}{\lambda_1}\cos\theta \tag{10}$$

Soit φ' le déphasage dû à chacune des réflexions en *B* et *C*. Ce déphasage dépend de l'angle d'incidence θ, mais aussi du cas de polarisation étudié : cas TE (TM) si $\vec{E}$ ($\vec{H}$) est perpendiculaire au plan de la figure.

Le déphasage total est : $\varphi + 2\varphi'$. Il doit être égal à $2m\pi$. Il y a donc une suite de valeurs de θ possibles correspondant à la suite des valeurs de m : soient (θ_e, m_e) dans le cas TE et (θ_h, m_h) dans le cas TM. Comme certaines de ces valeurs sont différentes alors que d'autres sont identiques, il en résulte que la propagation en guides diélectriques se fait par modes TE et TM séparés ou par modes TE et TM

superposés que l'on appelle modes hybrides et qui sont notés HE (pour TE + TM si le mode TE est prépondérant) ou EH (pour TM + TE si le mode TM est prépondérant).

Le nombre M de modes (TE ou TM) pouvant se propager dans un guide diélectrique à structure plane, dont la couche centrale a une épaisseur a, peut se calculer par la formule :

$$M = 2\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}\,\frac{a}{\lambda_0} \tag{11}$$

14.3 PROPAGATION EN GUIDES DIÉLECTRIQUES À STRUCTURE CYLINDRIQUE

Ces guides diélectriques (fig. 2) sont constitués d'une partie centrale, de rayon a, appelée le cœur dont la permittivité relative est ε_{1r} et d'une enveloppe appelée la gaine dont la permittivité relative est ε_{2r}. La propagation dans ces guides se fait également par modes TE, TM, EH et HE ; elle sera étudiée en détail au paragraphe 14.6 « Théorie électromagnétique des guides diélectriques ».

14.3.1 Le mode fondamental

Le mode fondamental est le mode hybride HE_{11} dont la fréquence de coupure est théoriquement nulle. Les premiers modes d'ordre supérieur sont les modes TE_{01} et TM_{01} dont la fréquence de coupure est :

$$f_c^{01} = \frac{2{,}405c}{2\pi a\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}} \tag{12}$$

Pour que le mode fondamental se propage seul, il faut que $f < f_c^{01}$, d'où l'on tire :

- si a est donné : $$f < \frac{2{,}405c}{2\pi a\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}} \tag{13}$$

- si f est donnée : $$a < \frac{2{,}405c}{2\pi f\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}} \tag{14}$$

Il est également possible de raisonner en longueurs d'ondes. La longueur d'onde de coupure est :

$$\lambda_c^{01} = \frac{v}{f_c^{01}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{1r}}} \cdot \frac{1}{f_c^{01}} \tag{15}$$

D'où : $$\lambda_c^{01} = \frac{2\pi a}{2{,}405}\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}}} \qquad (16)$$

soit : $$\lambda_c^{01} = \frac{2\pi a}{2{,}405}\sqrt{\Delta} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} \qquad (17)$$

Δ est la différence relative de permittivité entre le cœur et la gaine.

Pour que le mode fondamental se propage seul, il faut que $\lambda_1 > \lambda_c^{01}$, d'où l'on tire :

• si a est donné : $$\lambda_1 > \frac{2\pi a}{2{,}405}\sqrt{\Delta} \qquad (18)$$

• si λ est donnée : $$a < \frac{2{,}405\,\lambda_1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\Delta}} \qquad (19)$$

Remarque

La longueur d'onde λ_1 intervenant dans ces formules est celle dans le diélectrique qui constitue le cœur. Elle est reliée à la longueur d'onde $\lambda_0 = c/f$ dans le vide (ou l'air) par $\lambda_1 = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{1r}}$. Si l'on veut exprimer ces conditions par rapport à λ_0, il faut donc écrire :

$$\lambda_0 > \frac{2\pi a}{2{,}405}\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} \qquad (20)$$

ou $$a < \frac{2{,}405\,\lambda_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}} \qquad (21)$$

Nous voyons que ces conditions seront d'autant plus faciles à tenir que la différence de permittivité entre le cœur et la gaine sera plus petite ; d'où le choix de permittivités très voisines pour le cœur et la gaine.

Exemple

$n_1 = 1{,}456$ *(silice) et* $n_2 = 1{,}450$ *(silicone)*

$$\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = \sqrt{1{,}456^2 - 1{,}450^2} = 0{,}132$$

$$\Rightarrow \quad 2a < \frac{2{,}405}{\pi} \cdot \frac{1}{0{,}132}\,\lambda_0 = 5{,}8\,\lambda_0$$

Le diamètre du cœur doit donc être inférieur à $5{,}8\,\lambda_0$.

Mais pour que la propagation du fondamental s'effectue en quasi-totalité à l'intérieur du cœur – avec le minimum de pertes – on a intérêt à ce que les dimensions du cœur soient aussi grandes que possible. C'est pourquoi on utilise, dans la pratique, des cœurs dont le diamètre correspond à la limite supérieure autorisée soit, dans cet exemple, $5{,}8\,\lambda_0$.

14.3.2 Choix d'une fréquence optimale

Pour le mode fondamental, l'affaiblissement de propagation est donné par :

$$\alpha\,(\text{dB/m}) = 91F\,(\text{GHz})\sqrt{\varepsilon_{1r}}\,\text{tg}\,\delta \qquad (22)$$

Or, alors que ε_{1r} ne dépend pas de la fréquence, en revanche tg δ en dépend. Par conséquent, la propagation en guides diélectriques ne pourra être envisagée que dans la mesure où le produit F tg δ aura une valeur suffisamment faible.

- *Aux fréquences radioélectriques*, tg δ reste à peu près constant ou croît très légèrement avec la fréquence. C'est ainsi que pour le polyéthylène à 10 GHz, tg $\delta = 0{,}35 \cdot 10^{-3}$ et $\varepsilon_{1r} = 2{,}25$. Dans ces conditions :

 $$\alpha = 91 \cdot 10 \cdot \sqrt{2{,}25} \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-3} \simeq 0{,}4\ \text{dB/m}.$$

 Une telle atténuation est prohibitive pour les télécommunications (400 dB/km).

 Il y aurait la solution d'opérer à des fréquences cent fois plus faibles (100 MHz $\rightarrow \alpha = 4$ dB/km) mais alors les dimensions du guide deviendraient beaucoup trop grandes puisque nous avons vu qu'elles sont de quelques longueurs d'onde.

- *Aux fréquences optiques*, c'est-à-dire à des fréquences de l'ordre du THz (10^{14} Hz) où la longueur d'onde est de l'ordre du micron, plusieurs matériaux ont la propriété remarquable de présenter, dans certaines gammes de fréquences, des « fenêtres » transparentes où leurs pertes sont très faibles. Ainsi, à 500 THz ($\lambda_0 = 0{,}6$ µm) la silice a un tg $\delta = 15 \cdot 10^{-11}$ et $\varepsilon_{1r} = 2{,}25$.

 Nous avons alors : $\alpha = 91 \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 15 \cdot 10^{-11} \simeq 0{,}01$ dB/m.

 Soit une perte de 10 dB/km acceptable pour les télécommunications.

 Avec des silices spéciales, des affaiblissements de 1 dB/km, et même moins, ont pu être obtenus. C'est pourquoi les guides d'ondes diélectriques sont utilisés aux fréquences optiques où ils sont, en fait, connus sous le nom de fibres optiques.

14.4 LES FIBRES OPTIQUES

Il y a deux types de fibres :

- les fibres monomodes, dont le diamètre est de quelques longueurs d'onde,
- les fibres multimodes, dont le diamètre est de plusieurs dizaines de λ.

14.4.1 Les fibres monomodes

Les fibres monomodes ne propagent que le mode fondamental HE_{11}. Ceci est très intéressant car, puisque l'O.E.M. n'a qu'un seul mode de propagation, elle

n'a qu'une seule vitesse de phase et son parcours (fig. 6), par réflexions successives à l'intérieur du cœur de la fibre, est unique et bien défini : il n'y a donc pas de distorsion de phase et les signaux sont transmis sans déformation.

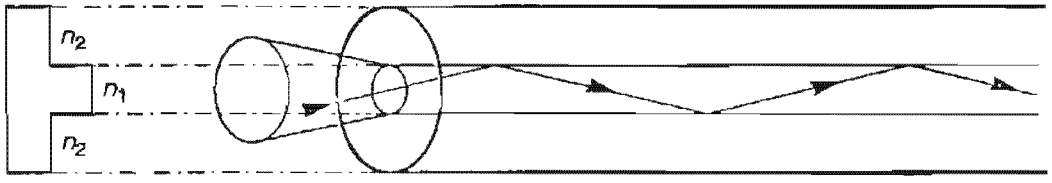


Figure 6. Propagation dans une fibre monomode à saut d'indice.

Ces fibres conviennent donc très bien pour la transmission de signaux analogiques ou de signaux numériques occupant une large bande de fréquences (1 GHz) et sur de très grandes distances (50 à 100 km) sans répéteur. Comme la dimension du cœur est de l'ordre de quelques longueurs d'onde dans le cœur (c'est-à-dire de 4 à 8 µm), ces fibres monomodes sont très difficiles à réaliser et le raccordement de deux tronçons de fibres pose de délicats problèmes de connectique. Par exemple, si le rapport des surfaces en regard, après connexion, est de 0,8, seule 80 % de la puissance sera transmise, ce qui correspond à une perte de – 1 dB.

C'est pourquoi, dans bien des applications où il est possible d'accepter une certaine distorsion des signaux transmis – notamment pour la transmission numérique par impulsions, où celles-ci sont régénérées à la réception – l'on préfère utiliser des fibres de plusieurs dizaines de microns, qui sont multimodes.

14.4.2 Les fibres multimodes

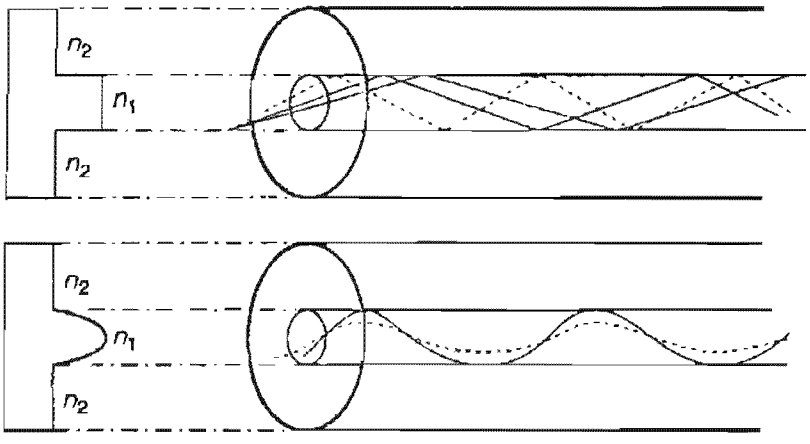


Figure 7. Propagation dans les fibres multimodes. *a.* fibre à saut d'indice, *b.* fibre à gradient d'indice.

Les fibres multimodes propagent donc plusieurs modes qui ont des vitesses de phase différentes et des parcours différents, d'où distorsion de phase pour le signal transmis.

Cet inconvénient est particulièrement sensible dans les fibres multimodes à saut d'indice (fig. 7a) dans lesquelles les temps de parcours sont directement proportionnels aux longueurs des trajets puisque la propagation s'effectue dans un milieu à indice constant.

Cet inconvénient peut être limité dans les fibres multimodes à gradient d'indice où l'indice du cœur diminue progressivement depuis l'axe de la fibre où il a une valeur n_1 jusqu'à la périphérie du cœur où il a une valeur n_2 égale à celle de la

gaine (fig. 7b). Il en résulte que les parcours caractéristiques des divers modes sont incurvés de telle sorte que :

- pour les modes dont le parcours est le plus long, les vitesses de phase augmentent au fur et à mesure qu'ils pénètrent dans des zones dont l'indice diminue,
- pour les modes dont le parcours est le plus court, les vitesses de phase sont plus faibles puisqu'ils se situent dans des zones où l'indice reste relativement élevé.

Ainsi, en déterminant convenablement la loi de variation de l'indice, il est possible d'obtenir des temps de parcours qui sont à peu près les mêmes pour les divers modes, ce qui permet de limiter la distorsion de phase (également appelée dispersion modale).

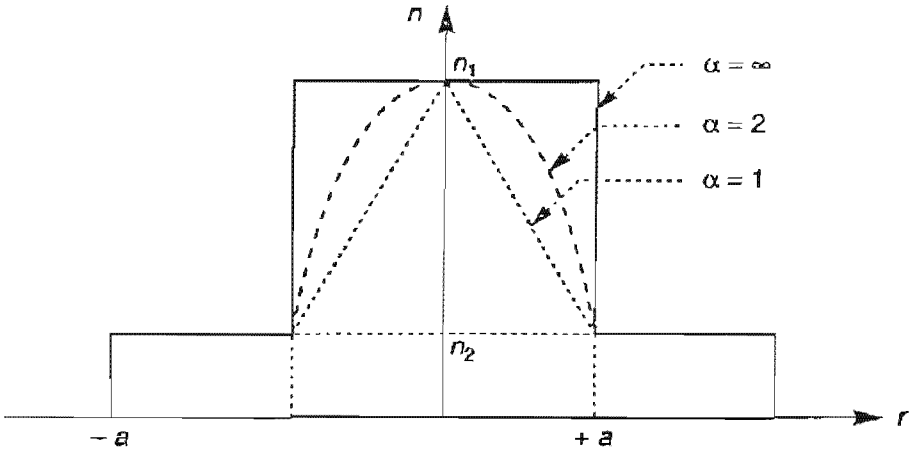


Figure 8.
Profils d'indice pour quelques valeurs du paramètre α.

La variation de l'indice dans le cœur (fig. 8) peut être représentée par une loi du type :

$$n(r) = n_1 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{où} \quad 0 \leq r \leq a \tag{23}$$

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \tag{24}$$

est la différence relative d'indice.

r est la distance radiale comptée depuis l'axe de la fibre.

α est un paramètre caractéristique du profil.

Pour $\alpha = \infty$, $n(r) = n_1$ pour $r < a$ et $n(r) = n_2$ pour $r = a$. C'est le cas limite de la fibre à saut d'indice. Pour $\alpha = 2$, le profil d'indice suit une loi parabolique ; c'est cette loi qui permet de limiter le mieux la distorsion de phase.

Le nombre de modes M *transportés par une fibre multimodes* se calcule à partir du carré du paramètre

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{25}$$

appelé la « fréquence normalisée » de la fibre ;

- pour une fibre à saut d'indice :

$$M = \frac{V^2}{2} \tag{26}$$

- pour une fibre à gradient d'indice et profil parabolique :

$$M = \frac{V^2}{4} \tag{27}$$

- pour une fibre à gradient d'indice et profil de paramètre α quelconque :

$$M = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \cdot \frac{V^2}{2} \tag{28}$$

Les fibres multimodes à saut d'indice ne sont utilisées que pour des liaisons à courte distance (de l'ordre du km) ; elles ont des diamètres de cœur de l'ordre de 100 à 200 µm. Les fibres multimodes à gradient d'indice sont utilisées dans les liaisons terrestres à large bande passante (100 MHz) et sur des distances d'une dizaine de kilomètres sans répéteur. Le diamètre de leur cœur est de l'ordre de 50 µm et celui de leur gaine de 125 µm.

14.5 CARACTÉRISTIQUES DES FIBRES OPTIQUES

14.5.1 L'ouverture numérique

Il y a une relation entre l'angle de réflexion à l'interface entre les deux diélectriques, et l'angle d'incidence de l'onde produite par le dispositif d'émission, sur la face d'entrée du guide d'ondes diélectrique. Traitons le cas (fig. 9) d'un guide diélectrique dont le cœur et la gaine sont respectivement caractérisés par des indices $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{1r}}$ et $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{2r}}$ et dont le face d'entrée se trouve plongée dans un milieu extérieur d'indice n_e.

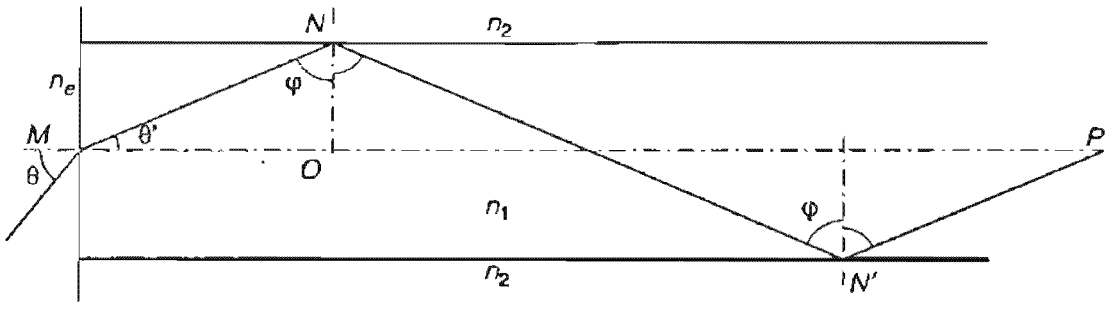


Figure 9. Trajets dans une fibre optique dans les conditions de réflexion totale.

- Loi de Descartes en M : $n_e \sin\theta = n_1 \sin\theta'$
- Loi de Descartes en N : $n_1 \sin\phi = n_2 \sin\phi'$
- Dans le triangle MON : $\theta' + \phi = \pi/2$.

Pour qu'il y ait réflexion totale en N, il faut que ϕ soit supérieur ou égal à l'angle limite ϕ_m tel que $\arcsin \varphi_m = n_2/n_1$. Nous avons donc $\phi \geq \phi_m \Rightarrow \theta' \leq \theta_M$ et $\theta \leq \theta_M$. Il y a donc un angle d'incidence maximal des ondes, θ_M, qui définit en M un cône à l'intérieur duquel doivent se trouver les rayons incidents si l'on veut que la réflexion totale se produise en N.

Par analogie avec les instruments d'optique, on définit un paramètre, appelé ouverture numérique de la fibre (*numerical aperture*, en anglais) et noté N.A., qui est lié à θ_M par :

$$\text{N.A.} = n_e \sin \theta_M \tag{29}$$

d'où :

$$\theta_M = \arcsin \frac{\text{N.A.}}{n_e} \tag{30}$$

Calculons ce paramètre :

- En N : $n_1 \sin \varphi_m = n_2$.
- En M : $n_e \sin \theta_M = n_1 \sin \theta'_M = n_1 \cos \varphi_m$.
- D'où :

$$\text{N.A.} = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{31}$$

- Si : $n_1 \simeq n_2 \rightarrow n_1 = n_2 + \Delta n$, avec Δn petit.
- Donc :

$$\text{N.A.} = \sqrt{2 n_1 \Delta n} \tag{32}$$

Pour une fibre à gradient d'indice la formule de l'ouverture numérique est la même que (31) ou (32) si l'on remplace n_1 par l'indice n_c selon l'axe du cœur de la fibre et $\Delta n = n_1 - n_2$ par $n_c - n_2$.

Rendement énergétique du couplage émetteur-fibre

La connaissance de l'ouverture numérique d'une fibre et du diagramme de rayonnement de la source émettrice est essentielle pour déterminer le rendement énergétique du couplage émetteur-fibre.

Soit :

$$P_p(\theta) = P_0 \cos^m \theta \ (m \geq 1) \tag{33}$$

le diagramme de rayonnement en puissance de la source émettrice dans un plan passant par la direction de rayonnement maximal $\theta = 0°$. Pour simplifier, nous supposons que ce diagramme est à symétrie de révolution autour de cette direction de rayonnement maximal.

Dans ces conditions, la puissance P_e rayonnée dans l'espace à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet θ_0, est donnée par :

$$P_e(\theta_0) = 2\pi \int_0^{\theta_0} P_p \sin \theta \, d\theta = 2\pi P_0 \int_0^{\theta_0} \cos^m \theta \sin \theta \, d\theta$$

L'intégrale I est facile à calculer :

$$I = -\int_1^{\cos \theta_0} \cos^m \theta \, d(\cos \theta) = \frac{1 - \cos^{m+1} \theta_0}{m+1}$$

D'où : $$P_e(\theta_0) = 2\pi P_0 \frac{1 - \cos^{m+1}\theta_0}{m+1} \quad (34)$$

La puissance totale rayonnée par la source émettrice est obtenue en prenant $\theta_0 = \pi/2$:

$$P_e\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{m+1} P_0 \quad (35)$$

d'où : $$P_e(\theta_0) = P_e\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \cos^{m+1}\theta_0\right) \quad (36)$$

Si θ_M est l'angle maximal d'admission des ondes par la fibre optique, le rendement énergétique du couplage de la source émettrice à la fibre est donc :

$$1 - \cos^{m+1}\theta_M \quad (37)$$

Une autre cause de pertes est à prendre en compte pour le calcul du couplage émetteur-fibre : l'indice n_e du milieu où est émise la lumière est différent de l'indice n_1 de la fibre ; souvent ce milieu est de l'air et $n_e = 1$. Il en résulte, en première approximation, un coefficient de réflexion dont le module est donné par :

$$R = \frac{n_1 - n_e}{n_1 + n_e} \quad (38)$$

Le pourcentage de puissance transmise dans la fibre est donc donné par :

$$1 - R^2 = 1 - \left(\frac{n_1 - n_e}{n_1 + n_e}\right)^2 \quad (39)$$

La perte correspondante est appelée « perte de Fresnel » ; elle est, en général, très faible devant la perte de couplage.

14.5.2 La bande passante

Dans une fibre optique utilisée pour les télécommunications, les informations sont transmises sous forme de signaux numériques c'est-à-dire d'impulsions séparées par des zéros. Après transmission, il faut que ces impulsions puissent être clairement reconnues, afin de reconstituer l'information avec un minimum d'altérations. Si les impulsions transmises sont déformées et élargies en cours de propagation, elles peuvent se chevaucher à l'arrivée et il devient difficile, voire impossible de les séparer et donc de reconstituer le signal transmis.

Pour déterminer la bande passante d'une fibre, nous allons donc calculer l'élargissement, en cours de propagation, d'une impulsion dont la largeur à l'émission serait nulle. Si l'élargissement est ΔT, le nombre d'impulsions transmissibles par seconde et $1/\Delta T$ (bit/s) et la bande passante est $1/\Delta T$ (Hz).

Ce phénomène provient de ce que, dans une fibre multimodes (fig. 7), il y a plusieurs chemins possibles pour aller d'un point de l'axe de la fibre à un autre. En

effet, les premiers modes se propagent quasiment en ligne droite tandis que les modes d'ordre supérieur se propagent avec un grand nombre de réflexions totales à l'interface des deux diélectriques.

a) Prenons d'abord l'exemple d'une fibre à saut d'indice

Pour aller de M à P (fig. 9) :

- le trajet minimal est $MP = L$,
- le trajet maximal est $MNN'P = 2NN' = L/\sin \varphi_m$.

La différence des trajets est : $\Delta L = L/\sin \varphi_m - L$

La différence des temps de parcours est : $\Delta T = n_1/c\ (L/\sin \varphi_m - L)$

d'où : $$\Delta T = \frac{n_1}{c}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)L = \frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2)\frac{L}{c} \qquad (40)$$

Cette formule permet de calculer l'élargissement ΔT d'une impulsion pour un parcours L dans la fibre.

Si n_1 et n_2 sont voisins, la formule approchée est :

$$\Delta T = \Delta n \frac{L}{c} \qquad \text{avec} \quad \Delta n = n_1 - n_2 \qquad (41)$$

L'élargissement d'une impulsion se propageant sur une fibre dépend donc de la longueur de la fibre et de la différence relative des ses indices. Le débit numérique maximal d'une fibre sera $1/\Delta T$ (bit/s) et sa bande passante maximale $1/\Delta T$ (hertz).

Exemple

$n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone).

Pour $L = 1$ km $\rightarrow \Delta T = 0{,}046 \cdot 1/(3 \cdot 10^5) = 0{,}15 \cdot 10^{-16}$ s^{-1}.

- *Le débit numérique maximal est : 6,666 Mbit/s.*
- *La bande passante maximale est : 6,666 MHz.*

b) Voyons maintenant le cas d'une fibre à gradient d'indice

Soit n_c l'indice de l'axe du cœur et $\Delta n = n_c - n_2$.

L'élargissement d'impulsion dépend beaucoup du profil d'indice adopté, c'est-à-dire de la valeur de l'exposant α de la loi (23) de variation de cet indice ; d'après *[63]* :

$$\Delta T = p(\alpha)\frac{(\Delta n)^2}{n_c} \cdot \frac{L}{c} \qquad (42)$$

Le facteur $p(\alpha)$ est minimal pour un profil quasi parabolique. Plus précisément, l'on a $p(\alpha) = 0{,}125$ pour $\alpha = 2\ (1 - \Delta n/n_c)$.

L'élargissement d'impulsion d'une fibre à gradient d'indice optimisé est donc :

$$\Delta T_{opt} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta n)^2}{n_c} \cdot \frac{L}{c} \quad (43)$$

Par rapport au cas de la fibre à saut d'indice, ΔT est multiplié par un facteur $\Delta n/8n_c$; il en résulte une bande passante multipliée par $8n_c/\Delta n$. Ainsi, avec l'indice n_c = 1,456 et le Δn = 0,046 de l'exemple précédent du a), nous avons $8n_c/\Delta n$ = 253 et le débit numérique passerait donc à 1 688 Mbit/s pour 1 km.

En pratique, il est très difficile d'obtenir exactement cette valeur optimale de α et $p(\alpha)$ varie très rapidement en fonction de α. C'est ainsi que :

- pour $\alpha = 2$ (profil parabolique) $\rightarrow p(\alpha) = 0{,}5$.
- pour $\alpha = 2\,(1 + \Delta n/n_c) \rightarrow p(\alpha) = 1$.

Une valeur assez réaliste de ΔT lorsque l'on n'a pas pris toutes les précautions technologiques coûteuses pour optimiser le gradient d'indice est :

$$\Delta T = \frac{(\Delta n)^2}{n_c} \cdot \frac{L}{c} \quad (44)$$

14.6 THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES GUIDES DIÉLECTRIQUES

Nous allons traiter le cas du guide diélectrique à saut d'indice. Le manque de place nous oblige à ne pas donner le détail de certaines démonstrations et à ne pas faire tous les commentaires utiles. Au lecteur désireux d'approfondir cette question, nous recommandons la lecture de Marcuse *[65, p. 289-305]*.

14.6.1 Mise en équations

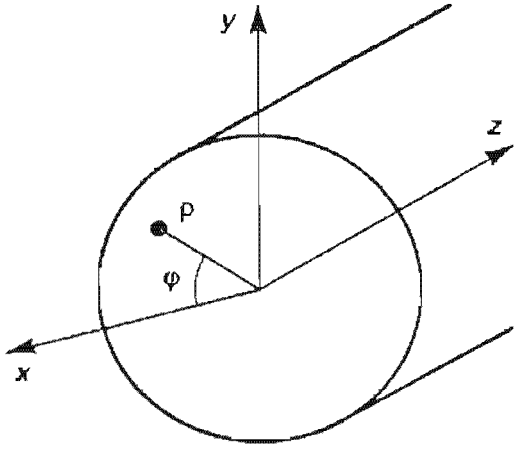


Figure 10. Coordonnées cylindriques.

Le début de la mise en équations est identique à celle qui a été faite au paragraphe 13.5.1 pour les guides d'ondes circulaires. Nous recherchons donc des solutions de la forme

$$\psi(\rho, \varphi) = F(\rho)\, e^{-jn\varphi} \quad (45)$$

satisfaisant :

- d'une part l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k_c^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) F = 0 \quad (46)$$

où :

$$k_c^2 = \omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2 \quad (47)$$

soit (si $\gamma = j\beta$) : $$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad (48)$$

- d'autre part les conditions aux limites suivantes :
 1) $F(\rho)$ fini pour $\rho = 0$ et $F(\rho) \to 0$ quand $\rho \to \infty$.
 2) Continuité des composantes tangentielles des champs à la surface de séparation des deux diélectriques.

D'après *[65, p. 292]*, les solutions qu'il convient de choisir sont les suivantes :

- **Pour $\rho < a$**, $F(\rho)$ est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre n et d'argument $u\rho$ avec :

$$u^2 = k_1^2 - \beta^2 \quad (49)$$

et : $$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu \quad (50)$$

Les composantes longitudinales des champs sont donc :

$$\underline{E}_z = A\, J_n(u\rho)\, e^{-jn\varphi} \quad (51)$$

$$\underline{H}_z = B\, J_n(u\rho)\, e^{-jn\varphi} \quad (52)$$

Les composantes transversales $\underline{E}_\rho$, $\underline{E}_\varphi$, $\underline{H}_\rho$, $\underline{H}_\phi$ se calculent d'après les relations (23) à (26) du chapitre 13 « Étude générale de la propagation ».

NB
Pour qu'il y ait propagation à l'intérieur du cœur, il faut que u *soit réel positif, d'où :* $k_1 \geq \beta$.

- **Pour $\rho > a$**, $F(\rho)$ est une fonction de Bessel modifiée de première espèce[1] d'ordre n et d'argument $w\rho$ avec :

$$w^2 = \beta^2 - k_2^2 \quad (53)$$

et : $$k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu \quad (54)$$

Les composantes longitudinales des champs sont donc :

$$\underline{E}_z = C\, K_n(w\rho)\, e^{-jn\varphi} \quad (55)$$

$$\underline{H}_z = D\, K_n(w\rho)\, e^{-jn\varphi} \quad (56)$$

NB
Pour les grandes valeurs de l'argument : $K_n(w\rho) \simeq w\rho$. *Pour que* $\underline{E}_z$ *et* $\underline{H}_z \to 0$ *quand* $\rho \to \infty$, *il faut donc que* w *soit positif, d'où :* $\beta \geq k_2$.

Quant aux composantes transversales, elles se calculent toujours d'après les relations (23) et (26) du chapitre 13.

Pour déterminer complètement les champs, nous devons trouver A, B, C, D ainsi que u et w c'est-à-dire β. De plus, notons que β doit se trouver dans l'intervalle :

$$k_2 \leq \beta \leq k_1 \quad (57)$$

La détermination de ces cinq inconnues s'effectue en écrivant que, pour $\rho = a$, les composantes tangentielles des champs $\underline{E}_z$, $\underline{E}_\varphi$, $\underline{H}_z$ et $\underline{H}_\varphi$ doivent être continues, ce qui fournit déjà 4 équations dont le déterminant doit être nul d'où une cinquième relation dite « équation caractéristique ou de dispersion » :

$$\left| \frac{J_n'(ua)}{u\, J_n(ua)} + \frac{K_n'(wa)}{w\, K_n(wa)} \right| \left| \frac{k_1^2\, J_n'(ua)}{u\, J_n(ua)} + \frac{k_2^2\, K_n'(wa)}{w\, K_n(wa)} \right| = n^2 \beta^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2 \quad (58)$$

1. Au lieu d'utiliser les fonctions de Bessel modifiées de première espèce $K_n(x)$, certains auteurs *[65]* préfèrent utiliser les fonctions de Hankel de première espèce $H_n^{(1)}(jx)$ qui leur sont reliées par :

$$K_n(x) = j\frac{\pi}{2} e^{jn\frac{\pi}{2}} H_n^{(1)}(jx) \quad (59)$$

Nous n'allons pas entreprendre la résolution fastidieuse, et d'ailleurs pas très heuristique, de ce système d'équations. Ce qui va nous intéresser maintenant, c'est la détermination des modes de propagation possibles, de leur fréquence de coupure et du mode fondamental.

14.6.2 Modes de propagation

- Lorsque $n = 0$, l'équation (58) a deux solutions :
 - l'annulation du premier crochet nous donne :

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{J_1(ua)}{J_0(ua)} + \frac{1}{w} \cdot \frac{K_1(wa)}{K_0(wa)} = 0 \qquad (60)$$

 On en déduit que $A = C = 0$, soit $E_z = 0$. La propagation se fait donc selon des modes du type TE ;
- l'annulation du second crochet nous donne :

$$\frac{k_1^2}{u} \cdot \frac{J_1(ua)}{J_0(ua)} + \frac{k_2^2}{w} \cdot \frac{K_1(wa)}{K_0(wa)} = 0 \qquad (61)$$

 On en déduit que $B = D = 0$, soit $H_z = 0$. La propagation se fait donc selon des modes du type TM.
- Lorsque $n \neq 0$, l'équation (58) ne peut être séparée en deux. Physiquement ceci correspond au fait que les modes qui se propagent ont des composantes longitudinales E_z et H_z différentes de zéro. De tels modes sont appelés des modes hybrides et notés EH ou HE selon que la composante prépondérante est E_z ou H_z.

14.6.3 Fréquences de coupure

Nous avons vu que la variation des champs en fonction de ρ à l'intérieur de la gaine ($\rho > a$) est régie par une fonction de Bessel modifiée $K_n(w\rho)$ qui a une décroissance du type exponentiel. Dans le cas où w est grand, les champs diminuent très vite et la quasi-totalité de l'énergie est concentrée à l'intérieur du cœur. Mais, si w n'est pas grand, les champs dans la gaine pénètrent d'autant plus loin que w est petit. À la limite ($w \to 0$), il n'y a plus de diminution des champs dans la gaine, l'onde qui se propage a la forme d'une onde plane et elle n'est plus guidée à l'intérieur du cœur.

La condition $w^2 = \beta^2 - k_2^2 = 0$, qui conduit à une telle propagation, est appelée une condition de coupure. Elle va nous permettre de calculer la fréquence de coupure d'après $u = \sqrt{k_1^2 - \beta^2}$ qui peut s'écrire dans ce cas :

$$u_c = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} = \sqrt{\omega_c^2 \varepsilon_1 \mu - \omega_c^2 \varepsilon_2 \mu} = 2\pi f_c \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mu} \qquad (62)$$

D'où :
$$f_c = \frac{u_c}{2\pi\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\mu}} \tag{63}$$

NB
Dans les relations (62) à (66) :
$\varepsilon_1 = \varepsilon_0\,\varepsilon_{1r}$,
$\varepsilon_2 = \varepsilon_0\,\varepsilon_{2r}$ et $\mu = \mu_0$

La détermination des valeurs de u correspondant à la coupure est effectuée dans *[65, p. 297-301]*. Elle donne les résultats suivants :

- les modes TE_{om} ou TM_{om} ($n = 0$) sont obtenus pour les valeurs $u_m a$ qui sont racines de $J_o(ua) = 0$;
- les modes EH_{nm} ($\forall\ n \neq 0$) sont obtenus pour les racines $u_m a$ de : $J_n(ua) = 0$ avec $ua \neq 0$;
- les modes HE_{nm} ($\forall\ n \neq 0$ et 1) sont obtenus pour les racines $u_m a$ de : $[(\varepsilon_1/\varepsilon_2) + 1]\,J_{n-1}(ua) = [(ua/n) - 1]\,J_n(ua)$;
- les modes HE_{1m} ($n = 1$) sont obtenus pour les racines $u_m a$ de : $J_1(ua) = 0$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $u_m a$ pour les trois premières racines de quelques-uns de ces modes. Pour les modes HE_{nm} (avec $n \neq 0$ et 1) elles correspondent au cas où $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 1{,}1$.

m	1	2	3	Modes
$n = 0$	2,405	5,520	8,654	TE, TM
1	0,000	3,832	7,016	HE
1	3,832	7,016	10,173	EH
2	2,445	5,538	8,665	HE
2	5,136	8,417	11,620	EH

14.6.4 Mode fondamental

Parmi tous ces modes, le seul pour lequel $u_m = 0$, soit $f_c = 0$, est le mode HE_{11} qui est donc le mode fondamental des guides d'ondes circulaires. Les premiers modes d'ordre supérieur sont TE_{01} et TM_{01} dont la fréquence de coupure correspond à la première racine de $J_o(ua) = 0$, obtenue pour $u_1 a = 2{,}405$. Pour qu'ils ne se propagent pas, il faut que $ua < 2{,}405$, soit :

$$2\pi a f\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\mu} < 2{,}405 \tag{64}$$

Si a est donné :
$$f < \frac{2{,}405}{2\pi a\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\mu}} \tag{65}$$

Si f est donnée :
$$a < \frac{2{,}405}{2\pi f\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\mu}} \tag{66}$$

14.7. CARACTÉRISTIQUES DE LA PROPAGATION

14.7.1 L'atténuation

Les causes des pertes sont au nombre de quatre :

- pertes par absorption dans les atomes du diélectrique, les plus gênantes étant celles dues à l'ion OH^- qui présente des raies d'absorption à 0,875 et 0,950 µm ;
- pertes par diffusion, dues aux inhomogénéités du diélectrique ($\sim 1/\lambda^4$) ;
- pertes par rayonnement car la gaine a des dimensions radiales limitées et est entourée par une enveloppe dissipative ;
- pertes par couplage de modes, dues aux défauts mécaniques et aux courbures.

Ceci étant, les pertes dépendent de l'ordre du mode considéré. Soient α_1 et α_2 les constantes de pertes dans le cœur et la gaine ; le coefficient de pertes global α_{nm} pour un mode d'ordre nm sera :

$$\alpha_{nm} = \frac{\alpha_1 P_{nm}^{(1)} + \alpha_2 P_{nm}^{(2)}}{P_t} \tag{67}$$

$P_{nm}^{(1)}$ et $P_{nm}^{(2)}$ sont respectivement les puissances dans le cœur et la gaine ; P_t est la puissance totale transportée par ce mode.

Gloge *[66]* a montré que :

$$\frac{P_{nm}^{(1)}}{P_t} = 1 - \frac{P_{nm}^{(2)}}{P_t} = \left| 1 - \frac{J_n^2(u)}{J_{n+1}(u)\, J_{n-1}(u)} \right| \frac{w^2}{V^2} \tag{68}$$

avec :
$$V^2 = (u^2 + w^2) \tag{69}$$

d'où : $(n \neq 1)$
$$\alpha = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{u^2}{V^2} (w^2 + n^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{70}$$

Signalons que loin de la coupure, Marcuse a trouvé :

$$\frac{P_{nm}^{(2)}}{P_t} = \left(\frac{u_m a}{V} \right)^4 \left(1 - \frac{2}{V} \right) \tag{71}$$

où $u_m a$ est la m^e racine de $J_n(ua) = 0$.

La perte totale est enfin obtenue en sommant les pertes pour chaque mode avec un facteur de pondération égal à son importance relative.

À l'heure actuelle (1996), les grands constructeurs mondiaux annoncent des pertes, en laboratoire, inférieures à 0,5 dB/km. Cela conduit, sur le terrain, à des pertes inférieures à 1 dB/km. Notons qu'étant donné la faible bande de fréquences de la porteuse occupée par la modulation, ces pertes sont indépendantes de la fréquence du signal transmis.

14.7.2 Dispersion – Bande passante

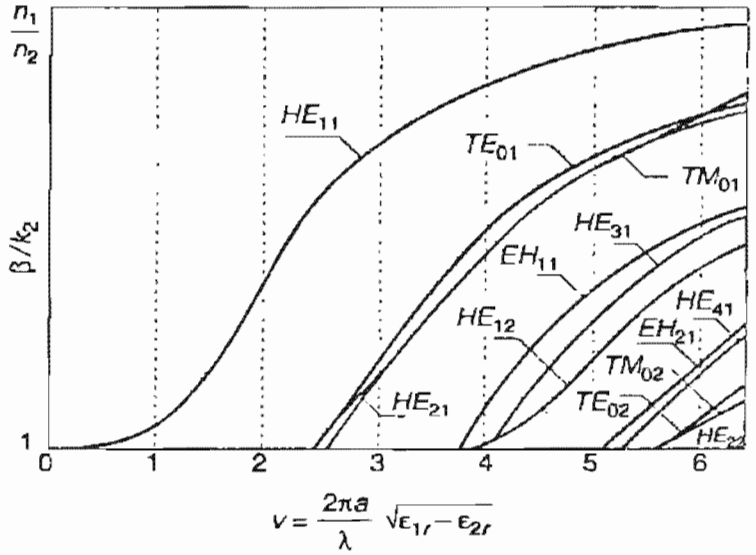


Figure 11.
Courbes de dispersion.

Les signaux numériques qui se propagent sur une fibre ont un certain spectre de fréquences. Il est donc très important de connaître la loi de variation du paramètre de phase β avec la fréquence. Au lieu de tracer le graphique $\beta(f)$, dont les échelles ne sont pas commodes, on préfère représenter (fig. 11) β/k_2 – dont l'intervalle de variation est compris entre 1 et n_1/n_2 – en fonction de $V = 2\pi(a/\lambda)\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}$ variable proportionnelle à f.

Il est souvent plus instructif de tracer le diagramme $\omega - \beta$ car :

- la pente de OQ représente la vitesse de phase $v_\phi = \omega/\beta$;
- la pente de la tangente en Q représente la vitesse de groupe $v_g = d\omega/d\beta$.

La figure 12 présente ce diagramme pour le mode HE_{11}. La courbe a un point d'inflexion au voisinage duquel v_g reste à peu près constante, d'où l'intérêt d'utiliser la bande de fréquences correspondante. Les asymptotes à la courbe donnent les v_ϕ extrêmes.

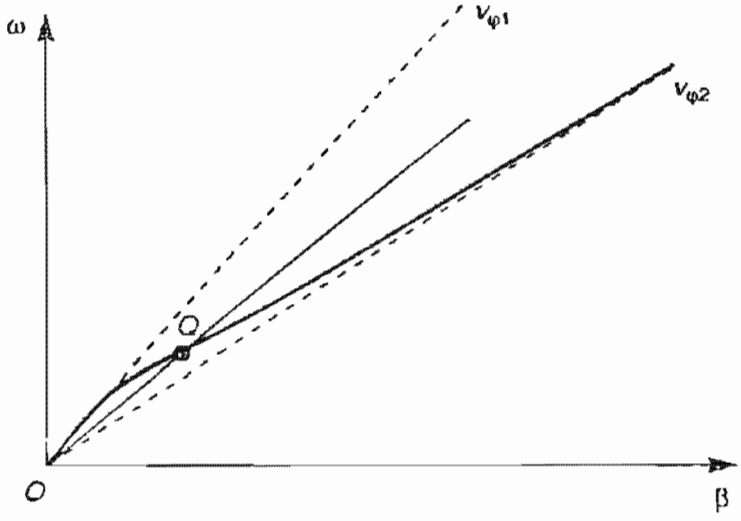


Figure 12.
Diagramme $\omega - \beta$.

Nous avons déjà indiqué paragraphe 14.5.2 que la bande passante d'une fibre s'exprime en Hertz par le même nombre que l'inverse de l'élargissement d'impulsion $1/\Delta T$. Pour une longueur L de fibre :

$$\Delta T = \frac{L}{v_g} \tag{72}$$

Pour les fibres monomodes, l'élargissement d'impulsion ne peut pas provenir de l'existence de plusieurs modes ayant des trajets et donc des temps de parcours différents. La seule cause d'élargissement est la dispersion chromatique qui est liée aux matériaux constituant le cœur de la fibre :

$$\Delta T = \frac{L}{c} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \tag{73}$$

$\Delta\lambda/\lambda$ est la largeur de bande relative du signal ; $\lambda^2(d^2n/d\lambda^2)$ est la dispersion du diélectrique.

Avec les silices spéciales actuellement utilisées dans les fibres à faibles pertes, on obtient des $\Delta T/L = 1$ ns/km pour $\Delta\lambda/\lambda = 1$ % à $\lambda = 0{,}82$ µm, ce qui correspond à une bande passante de 1 GHz.

Pour les fibres multimodes, la dispersion chromatique est inférieure d'un facteur 10 à la dispersion modale. L'élargissement d'impulsion provenant de cette dernière a été calculé directement par une méthode de rayons au paragraphe 14.5.2.

EXERCICES

EXERCICE 14.1

(Paragraphe 14.2 – Propagation en guide diélectrique à structure plane)

Calculer le nombre de modes TE ou TM qui peuvent se propager dans un guide à structure plane d'épaisseur $a = 50$ µm où se propage une onde dont la longueur d'onde dans l'air ou le vide est : $\lambda_0 = 1$ µm ; $n_1 = 1{,}5$ et $n_2 = 1{,}4$.

1) Faire ce calcul à partir de la formule (10) en écrivant que $\varphi + 2\varphi' = 2m\pi$ et en se plaçant dans le cas où $\theta = \theta_{1L}$.

2) Retrouver le résultat en appliquant la formule (11).

EXERCICE 14.2

(Paragraphe 14.3 – Propagation en guides diélectriques à structure cylindrique)

Étant donné un guide diélectrique pour lequel $\varepsilon_{1r} = 2{,}25$ et $\varepsilon_{2r} = 2$, trouver la dimension maximale du cœur, exprimée en longueurs d'onde, pour que seul le mode fondamental puisse se propager. Calculer cette dimension pour $f = 230 \cdot 10^{12}$ Hz.

EXERCICE 14.3

(Paragraphe 14.4 – Les fibres optiques)

Une fibre multimodes a un cœur de diamètre 50 µm. L'indice du cœur est $n_1 = 1{,}45$; celui de la gaine $n_2 = 1{,}4$.

1) Calculer le nombre de modes qui peuvent se propager à $\lambda_0 = 1{,}3$ µm dans une fibre à saut d'indice et dans une fibre à gradient d'indice avec un profil d'indice parabolique

2) En déduire le nombre de modes à $\lambda_0 = 0{,}83$ µm.

EXERCICE 14.4

(Paragraphe 14.5.1 – L'ouverture numérique)

1) Une fibre optique a un cœur d'indice $n_1 = 1{,}5$ et une gaine d'indice $n_2 = 1{,}4$. Quelle est son ouverture numérique ?

En déduire l'angle maximal d'admission des ondes si le milieu entre la source et la fibre est de l'air.

2) La source émettrice est une diode électroluminescente (DEL) dont le diagramme de rayonnement en puissance est de la forme $P(\theta) = P_0 \cos^2 \theta$. Calculer en dB la perte du couplage émetteur-fibre.

3) Calculer aussi en dB la perte de Fresnel.

EXERCICE 14.5

(Paragraphe 14.5.2 – La bande passante)

1) Calculer le débit numérique maximal et la bande passante maximale, sur une distance de 1 km, d'une fibre multimodes à saut d'indice dont les indices du cœur et de la gaine sont : $n_1 = 1{,}5$ et $n_2 = 1{,}4$.

2) Mêmes questions pour une fibre optique à gradient d'indice optimisé pour laquelle $n_c = 1{,}5$ et $n_2 = 1{,}4$.

EXERCICE 14.6

(Paragraphe 14.5.2 – La bande passante)

Quelle est la condition pour que la bande passante d'une fibre à gradient d'indice optimisé soit 1 000 fois plus grande que celle d'une fibre à saut d'indice ?

Application au cas où $n_1 = n_c = 1{,}5$. En déduire n_2.

EXERCICE 14.7

(Paragraphe 14.7.2 – Dispersion – Bande passante)

Une diode laser émet à une longueur d'onde $\lambda_0 = 1{,}3$ µm avec une largeur spectrale $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-9}$ m. La fibre optique dopée qui est utilisée présente une dispersion chromatique $d^2n/d\lambda^2 = 0{,}5 \cdot 10^{10}\ m^{-2}$.

1) Calculer l'élargissement d'impulsion pour une propagation monomode sur une longueur de fibre $L = 1$ km.

2) En déduire le débit numérique maximal et la bande passante maximale.

Chapitre 15

Les cavités électromagnétiques

15.1 Introduction

Une cavité électromagnétique est un volume vide ou rempli de diélectrique, limité par des murs de type électrique (interface avec un conducteur) ou de type magnétique (interface avec un diélectrique à haute permittivité). Dans le premier cas, il s'agit d'une cavité métallique et dans le second cas d'un résonateur diélectrique.

Les cavités peuvent, en principe, avoir des formes géométriques quelconques mais, en pratique, elles ont une forme cylindrique à section rectangulaire ou circulaire. Les cavités métalliques peuvent ainsi être obtenues en fermant des guides d'ondes rectangulaires ou circulaires par des plaques métalliques perpendiculaires à l'axe longitudinal du guide.

Si, par un moyen approprié (une antenne du type électrique ou magnétique), un champ électromagnétique est excité à l'intérieur d'une cavité, il peut s'y produire des ondes stationnaires lorsque les conditions de résonance existent. La cavité emmagasine alors une certaine quantité d'énergie électromagnétique.

L'étude des conditions de résonance de la cavité (§ 15.2) permet de définir les modes propres ainsi que les longueurs et les fréquences propres d'une cavité. Nous étudierons ces paramètres caractéristiques pour les principaux types de cavités et de résonateurs diélectriques (§ 15.3).

Lorsque la cavité a des pertes – dans ses parois, dans le diélectrique, par le ou les couplages avec les circuits extérieurs – il est possible, comme dans un circuit

résonnant classique, de définir des coefficients de surtension dont nous donnerons les expressions (§ 15.4).

La modélisation d'une cavité par un circuit résonnant série ou parallèle permet d'en calculer l'impédance d'entrée dans un plan de référence sur la voie de couplage de la cavité avec l'extérieur (§ 15.5). Cette étude est très importante car elle établit les conditions d'équivalence entre le circuit résonnant à constantes réparties qu'est une cavité et les circuits résonnants à constantes localisées (R, L, C) classiquement utilisés aux fréquences inférieures.

Lorsque la cavité est couplée par un seul accès (§ 15.6) elle fonctionne en absorption ou en réflexion (voire en émission dans les dispositifs radiométriques) tandis que si elle est couplée par deux accès (§ 15.7) elle fonctionne en transmission. Dans le premier cas, nous établirons les expressions de la puissance absorbée ou réfléchie et dans le second cas, celles des puissances transmise et réfléchie. Dans chacun de ces cas, nous analyserons le fonctionnement de la cavité dans et hors le domaine de résonance.

L'importance des cavités va bien au-delà de leur utilisation en tant qu'élément résonnant ou en tant que fréquencemètre dans les circuits hyperfréquences. Elles sont, en effet, utilisées pour la détermination de la permittivité complexe de gaz ou d'échantillons de matériaux de petites dimensions. En ondes millimétriques, on utilise des cavités ouvertes analogues aux résonateurs employés en optique dans les interféromètres de Fabry-Perot (§ 15.8). Notons enfin l'utilisation des cavités métalliques et des résonateurs diélectriques pour fixer la fréquence de résonance des oscillateurs à tubes (tels que le klystron) ou à l'état solide (tels que les transistors à effet de champ à l'Arséniure de Gallium).

15.2 ÉTUDE DES CONDITIONS DE RÉSONANCE D'UNE CAVITÉ

15.2.1 Modes de résonance propres d'une cavité

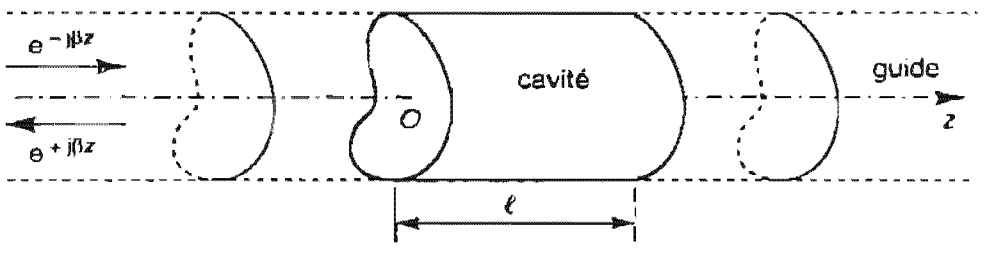


Figure 1. Schéma d'une cavité découpée dans un guide d'ondes cylindrique.

(Figure extraite de [68], p. 31)

Considérons un guide d'ondes cylindrique supposé sans perte d'axe Oz dont la section droite a une forme quelconque (fig. 1). Soit une onde TE ou TM qui se

propage dans ce guide vers les $z > 0$ à une fréquence f. Ses champs dépendent de z par l'intermédiaire d'un facteur de propagation $e^{-j\beta z}$. Si nous plaçons, en une section transversale du guide, une plaque de court-circuit, il y a propagation vers les $z < 0$ d'une onde réfléchie dont les champs dépendent de z par le facteur $e^{j\beta z}$.

En vertu des conditions aux limites $E_{//} = 0$ et $H_{\perp} = 0$, le coefficient de réflexion sur la plaque métallique est égal à :

+ 1, pour les composantes longitudinale de E et transversale de H,

– 1, pour les composantes transversale de E et longitudinale de H.

Par conséquent, les champs résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie seront affectés :

- d'un facteur $e^{-j\beta z} + e^{j\beta z} = 2 \cos \beta z$ pour les composantes E_z et H_T correspondant à $R = +1$.
- d'un facteur $e^{-j\beta z} - e^{j\beta z} = -2j \sin \beta z$ pour les composantes H_z et E_T correspondant à $R = -1$.

Si nous désirons placer une autre plaque de court-circuit en une autre section transversale, de façon à avoir des réflexions successives sur les deux plaques, il faudra que les conditions aux limites $E_{//} = 0$ et $H_{\perp} = 0$ y soient satisfaites. Ces conditions ne concernent que E_T et H_z qui varient en sin βz. Comme deux minima nuls de sin βz correspondent à $\beta z = p\pi$, il faudra donc que :

$$\frac{z}{\lambda_g} = \frac{p}{2} \qquad (1)$$

Les modes de résonance possibles de la cavité sont appelés modes propres et notés TE_{mnp} et TM_{mnp}. Les indices m et n dépendent de l'ordre du mode TE ou TM considéré. Ce sont deux entiers positifs ou nuls, mais ils ne peuvent être nuls simultanément. En ce qui concerne p, la démonstration ci-dessus – qui conduit à des valeurs de p strictement positives – doit être complétée.

En effet, dans le cas de modes TM à la coupure, le champ $\vec{E}$ est uniquement longitudinal alors que le champ $\vec{H}$ est transversal : les conditions aux limites sur des plaques métalliques transversales sont donc satisfaites quelle que soit la distance séparant ces deux plaques. Ces modes sont notés TM_{mn0} puisque p n'intervient dans aucune condition.

Nous trouverons donc, dans les cavités, les modes TE suivants :

TE_{10p} TE_{m0p}

TE_{01p} TE_{0np}

TE_{11p} TE_{1np}

TE_{11p} TE_{m1p}

et les mêmes modes TM, mais avec p pouvant être nul.

Notons que, pour les cavités parallélépipédiques, il est exclu, en mode TM, d'avoir m ou n nul.

15.2.2 Longueurs et fréquences de résonance propres d'une cavité

■ *Si la fréquence* f, *c'est-à-dire* λ_g, *est imposée*, la distance entre les deux plaques de court-circuit (hormis le cas des modes TM_{mn0}) doit être :

$$z = \frac{p\,\lambda_g}{2} \tag{2}$$

Nous savons qu'à une fréquence donnée, la longueur d'onde guidée dépend, par l'intermédiaire de la longueur d'onde de coupure, de l'ordre (m, n) du mode TE_{mn} ou TM_{mn} qui se propage.

Comme :
$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2_{mn}} \tag{3}$$

avec :
$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{4}$$

il en résulte que les longueurs possibles de la cavité sont :

$$\ell_{mnp} = \frac{p}{2}\left|\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2_{mn}\right|^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Il y a donc une suite discrète de longueurs ℓ_{mnp} possibles de la cavité correspondant d'une part à la suite des modes TE_{mn} et TM_{mn}, d'autre part, pour chacun d'eux, à la suite des nombres entiers p. On dit que la cavité oscille en mode TE_{mnp} ou TM_{mnp}.

■ *Si la longueur* ℓ *de la cavité est imposée*, la condition porte alors sur λ_g, c'est-à-dire sur la longueur d'onde de fonctionnement, d'après :

$$\lambda_g = \frac{2\ell}{p} \tag{6}$$

Comme : $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2_{mn} + \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2}$, nous avons :

$$\lambda_{mnp} = \left|\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2_{mn} + \left(\frac{p}{2\ell}\right)^2\right|^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

D'où :
$$f_{mnp} = v\left|\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2_{mn} + \left(\frac{p}{2\ell}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

avec :
$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{9}$$

Il y a donc une suite discrète de fréquences possibles de fonctionnement de la cavité, correspondant d'une part à la suite des nombres entiers p, d'autre part à la suite des modes TE_{mn} et TM_{mn}. Ces fréquences sont appelées les fréquences propres de la cavité.

Parmi les fréquences propres aux modes TE et TM, la plus basse est appelée fréquence fondamentale et correspond au mode propre dominant de la cavité. Les fréquences propres supérieures ne sont pas des multiples entiers de la fréquence fondamentale et leurs fréquences se rapprochent lorsque leur ordre croît. Dans la mesure où la cavité est sans perte, la largeur de bande est nulle autour des diverses fréquences propres ; elles forment un spectre discret de fréquences monochromatiques. Bien sûr, il n'en est pas vraiment ainsi, en raison des pertes, et il y a une courbe de résonance autour de chaque fréquence propre (fig. 2).

En général, un seul mode propre est associé à une fréquence propre, mais il arrive que plusieurs modes propres correspondent à la même fréquence, on dit alors qu'il y a dégénérescence.

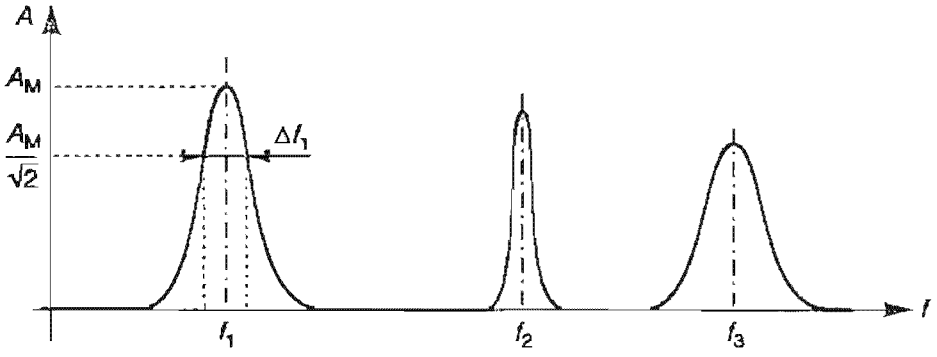


Figure 2.
Courbe de réponse spectrale d'une cavité ayant des pertes.

(Figure extraite de [68], p. 70)

15.3 PRINCIPAUX TYPES DE CAVITÉS RÉSONNANTES

15.3.1 Cavité cylindrique à section rectangulaire

Les équations des champs sont obtenues à partir de celles des champs du guide d'ondes rectangulaire, en multipliant :

- les composantes $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_T$ par 2 cos βz,
- les composantes $\underline{H}_z$ et $\underline{E}_T$ par 2j sin βz.

Conformément à la relation (8) les fréquences propres sont données par :

$$f_{mnp} = v\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\ell}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

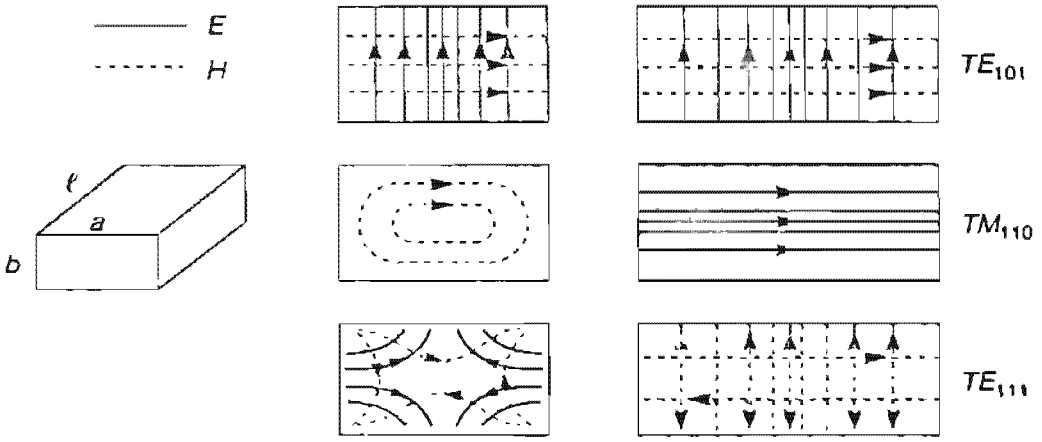


Figure 3. Lignes de champs E (——►) et H (- - - -►) dans une cavité cylindrique à section rectangulaire. Modes TE_{101}, TM_{110}, TE_{111}.

(Figure extraite de [68], p. 42)

La figure 3 permet de visualiser les lignes de champs électrique et magnétique pour des coupes transversales (au milieu) et longitudinales (à droite) d'une cavité parallélépipédique fonctionnant en modes TE_{101}, TM_{110} et TE_{111}.

La fréquence fondamentale s'obtient en donnant aux indices m, n, p leurs plus basses valeurs (0, 1, 1 ou 1, 0, 1) et en faisant correspondre l'indice 0 à la plus petite dimension. Dans ces conditions, on trouve que la fréquence fondamentale est soit celle de l'un des modes TE_{101} ou TE_{011} soit celle du mode TM_{110}.

Exemple
$\lambda = 3$ cm
$V = 100$ dm^3
$N \simeq 9$ modes/MHz.

Une cavité rectangulaire où peuvent coexister un nombre élevé de modes est dite surdimensionnée. Le nombre de modes possibles dans une bande de fréquences $[f_0, f_0 + \Delta f]$ est :

$$N \simeq 8\pi \frac{V}{\lambda^3} \cdot \frac{\Delta f}{f_0} \qquad (11)$$

où V est le volume de la cavité.

Exemple
$\lambda_{min} = 3$ cm
$V = 1$ dm^3
$\rightarrow N' \simeq 330$

Par ailleurs, le nombre de modes correspondant à des longueurs d'onde propres supérieures à une longueur d'onde minimale est :

$$N' \simeq \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{V}{\lambda_{min}^3} \qquad (12)$$

15.3.2 Cavité cylindrique à section circulaire

Les équations des champs sont obtenues à partir de celles des champs du guide d'ondes circulaire, en multipliant :

- les composantes $\underline{E}_z$ et $\underline{H}_T$ par $2 \cos \beta z$,
- les composantes $\underline{H}_z$ et $\underline{E}_T$ par $-2j \sin \beta z$.

Les fréquences propres sont données pour les modes TE_{nmp} et TM_{nmp} d'une cavité de rayon R et de hauteur h, par :

modes TE_{mnp} :

$$f_{mnp} = v\left[\left(\frac{u'_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2h}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

modes TM_{mnp} :

$$f_{mnp} = v\left[\left(\frac{u_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2h}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Le tableau I donne les valeurs de u_{mn} et u'_{mn} pour les premiers modes TM_{mn} et TE_{mn} respectivement.

MODES TM_{mn}		MODES TE_{mn}	
m, n, p	u_{mn}	m, n, p	u'_{mn}
0 1 p	2,404 8	1 1 p	1,841 2
1 1 p	3,831 7	2 1 p	3,054 2
2 1 p	5,135 6	0 1 p	3,831 7
0 2 p	5,520 1	3 1 p	4,201 2
3 1 p	6,380 2	4 1 p	5,317 5
1 2 p	7,015 6	1 2 p	5,331 4
4 1 p	7,588 3	5 1 p	6,415 6
2 2 p	8,417 2	2 2 p	6,706 1
0 3 p	8,653 7	0 2 p	7,015 6
5 1 p	8,771 4	6 1 p	7,501 3

Tableau I

Le mode fondamental correspond à la plus petite valeur de p et de u_{mn} ou u'_{mn}. Pour les modes TM, il s'agit du mode TM_{010} pour lequel $u_{01} = 2{,}405$

d'où :

$$\lambda_{010} = 2{,}612\, R \quad (15)$$

et

$$f_{010} = 0{,}383\, \frac{v}{R} \quad (16)$$

Pour les modes TE, il s'agit du mode TE_{111} pour lequel $u'_{11} = 1{,}841$, d'où :

$$\lambda_{111} = \left(\frac{0{,}086}{R^2} + \frac{0{,}25}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Les configurations des lignes de champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sur les parois métalliques de la cavité ainsi qu'en un plan de section transversale médiane sont données à la figure 4 pour ces modes fondamentaux et pour les modes TE_{011} et TM_{011}.

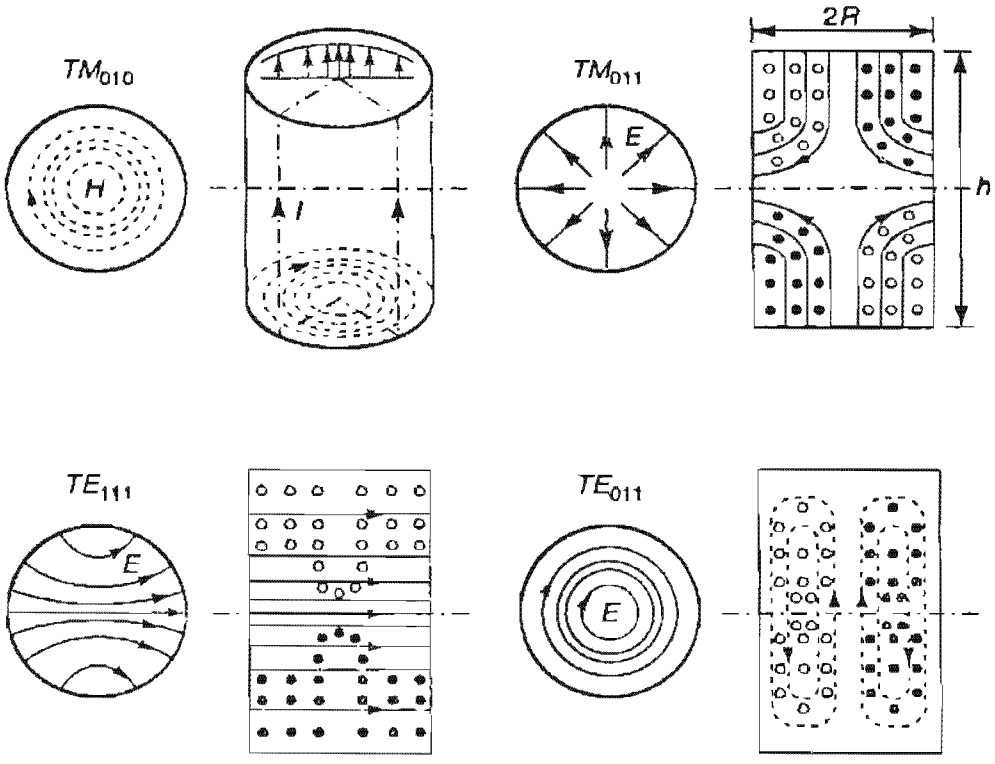


Figure 4.
Lignes de champs E (——►) et H (- - - -►) dans une cavité cylindrique à section circulaire. Modes TE_{111}, TE_{011}, TM_{010} et TM_{011}.

(Figure extraite de [68], p. 51)

Remarque

Afin d'avoir une notation homogène pour toutes les cavités cylindriques, les modes des cavités à section circulaire ont été notés TE_{mnp} et TM_{mnp} alors que les modes des guides d'ondes circulaires avaient été notés TE_{nm} et TM_{nm} au chapitre 13.

Il serait possible, sans ambiguïté, d'adapter la première notation à la seconde en échangeant les places des indices m *et* n *et en notant donc les modes de cavité à section circulaire TE_{nmp} et TM_{nmp}.*

Les valeurs numériques données dans le tableau I pour u_{mn} et u'_{mn} devraient être conservées pour les u_{nm} et u'_{nm} correspondant aux modes TM_{nmp} et TE_{nmp}.

Le diagramme de la figure 5 tracé à partir des relations (13) et (14) permet :

- soit de trouver les fréquences de résonance correspondant aux divers modes possibles, pour une cavité dont on connaît les dimensions (R, h) ;
- soit de trouver la hauteur d'une cavité correspondant aux divers modes possibles, si l'on connaît son rayon et la fréquence ;
- soit de faire l'inventaire des modes de résonance d'une cavité dans une certaine bande de fréquences.

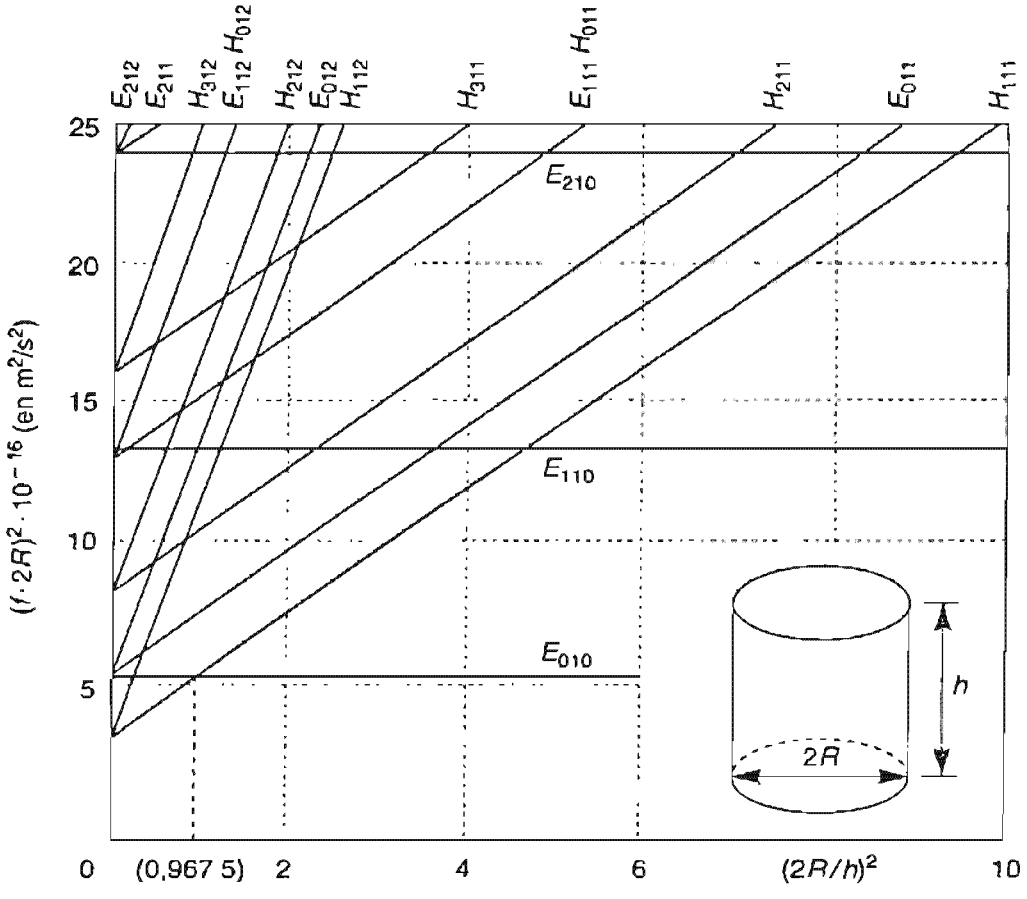


Figure 5.
Diagramme des modes et des fréquences de résonance d'une cavité cylindrique à section circulaire.

(Pour abréger on a utilisé la notation *E* pour TM et *H* pour TE).

(Figure extraite de [68], p. 48)

15.3.3 Résonateurs diélectriques

Ce sont des volumes diélectriques à haute permittivité dont la forme est, en général, cylindrique ou parallélépipédique. Ils peuvent être considérés comme des cavités résonnantes pour lesquelles les conditions aux limites sont celles imposées par l'interface air-diélectrique à haute permittivité. Cette interface constitue un mur magnétique alors que dans les cavités constituées à partir de guides d'ondes métalliques, l'interface air-métal constitue un mur électrique. Les résonateurs diélectriques sont utilisés dans certains filtres et dans les oscillateurs micro-ondes pour stabiliser leur fréquence.

Comme dans les cavités résonnantes à parois métalliques, la résonance s'établit selon différents modes dont les fréquences sont déterminées par les dimensions de la cavité et les conditions aux limites. Le mode fondamental est un mode TE_{01p} et les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde guidée $\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon_r}$. ε_r étant élevé, les champ *E* et *H* sont confinés à l'intérieur du résonateur et à son voisinage, si bien que les pertes par rayonnement sont faibles.

Pour un matériau diélectrique à faibles pertes, il est possible d'obtenir un coefficient de surtension à vide élevé. Les matériaux les plus utilisés sont des céramiques dont la permittivité ε_r peut atteindre 90. Les fréquences d'utilisation vont de 3 GHz, au-dessous de laquelle les dimensions du résonateur seraient prohibitives, à 30 GHz, au-dessus de laquelle le coefficient de surtension n'est plus suffisant.

Les résonateurs diélectriques sont montés à l'intérieur d'un boîtier métallique et la configuration la plus utilisée en micro-ondes est celle représentée à la figure 6 car elle se prête bien au couplage avec une ligne microbande.

Figure 6. Schéma d'un résonateur diélectrique

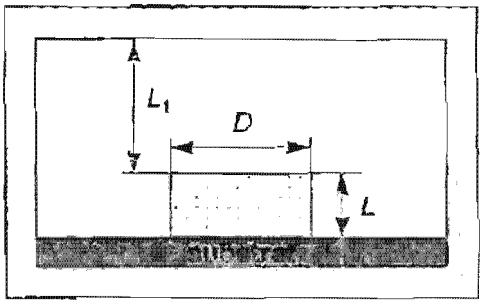
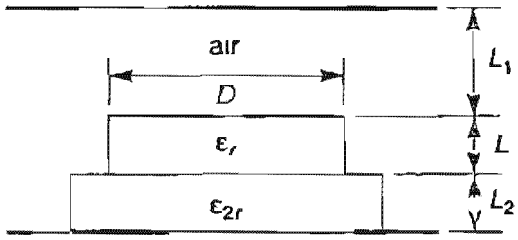


Figure 7. Dimensions d'un résonateur diélectrique



Le calcul du diamètre D du résonateur et de sa hauteur L (fig. 7) se conduit selon la procédure approchée suivante, d'après Kajfez *[72]* :

■ Les hypothèses de départ sont :
- la fréquence de résonance recherchée,
- l'épaisseur L_2 du substrat diélectrique,
- la distance L_1 entre les faces en regard du diélectrique et du boîtier,
- les constantes diélectriques relatives, ε_r et ε_{2r}, du résonateur et du substrat.

■ Le diamètre D doit être choisi dans les limites suivantes :

$$\frac{5{,}4}{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} < D < \frac{5{,}4}{k_0\sqrt{\varepsilon_{2r}}} \tag{18}$$

k_0 est la constante de propagation en espace libre, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

■ La hauteur L est donnée par la formule :

$$L = \frac{1}{\beta}\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\coth\alpha_1 L_1\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta}\coth\alpha_2 L_1\right)\right] \tag{19}$$

β est la constante de propagation dans le résonateur diélectrique :

$$\beta^2 = k_0^2\,\varepsilon_r - h^2 \tag{20}$$

α_1 et α_2 sont les constantes d'atténuation dans les guides d'ondes sous coupure, de hauteurs L_1 (diélectrique air) et L_2 (substrat diélectrique).

$$\alpha_1^2 = h^2 - k_0^2 \tag{21}$$

et

$$\alpha_2^2 = h^2 - k_0^2\,\varepsilon_{2r} \tag{22}$$

• Le paramètre h de ces formules est à calculer d'après :

$$h = \frac{2}{D}\left|2{,}405 + \frac{y_0}{2{,}405\left(1 + \frac{2{,}43}{y_0} + 0{,}291\, y_0\right)}\right| \tag{23}$$

avec :
$$y_0 = \sqrt{\left(k_0 \frac{D}{2}\right)^2 (\varepsilon_r - 1) - 2{,}405^2} \tag{24}$$

Réciproquement, les relations ci-dessus permettent de calculer la fréquence de résonance du résonateur diélectrique connaissant ses caractéristiques géométrique ainsi que ε_r et ε_{2r}. La résolution précise de ce problème ne peut-être que numérique.

15.4 COEFFICIENTS DE SURTENSION D'UNE CAVITÉ

15.4.1 Définition du coefficient de surtension

Par définition, le coefficient de surtension est le produit par 2π du quotient de l'énergie emmagasinée W_a par l'énergie perdue W pendant une période, soit :

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W} \tag{25}$$

Si P est la puissance perdue moyenne : $W = PT$ et nous avons :

$$Q = \omega \frac{W_a}{P} \tag{26}$$

a) Énergie emmagasinée dans la cavité

Si $\underline{E}$ et $\underline{H}$ sont les amplitudes complexes des champs, l'énergie emmagasinée dans un élément de volume dv est :

$$dW_a = \frac{1}{2}\varepsilon\, \underline{E} \cdot \underline{E}^*\, dv = \frac{1}{2}\mu\, \underline{H} \cdot \underline{H}^*\, dv \tag{27}$$

Dans la cavité de volume V, nous aurons donc :

$$W_a = \frac{1}{2}\varepsilon \int_V \underline{E} \cdot \underline{E}^*\, dv = \frac{1}{2}\mu \int_V \underline{H} \cdot \underline{H}^*\, dv \tag{28}$$

b) Puissance moyenne perdue dans la cavité

Les pertes peuvent être de diverses natures :

• pertes ohmiques dans les parois, soit P_j,

- pertes dans le diélectrique dont est remplie la cavité, soit P_d,
- pertes à travers les couplages vers l'extérieur, soit P_{ex}.

Les pertes totales sont donc :

$$P = P_j + P_d + P_{ex} \tag{29}$$

Le coefficient de surtension correspondant à ces pertes totales est :

$$Q_{ch} = \omega \frac{W_a}{P_j + P_d + P_{ex}} \tag{30}$$

Il est appelé coefficient de surtension (ou de qualité) en charge.

15.4.2 Coefficients de surtension (ou de qualité) partiels

L'inverse du coefficient de surtension en charge est :

$$\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{P_j}{\omega W_a} + \frac{P_d}{\omega W_a} + \frac{P_{ex}}{\omega W_a} \tag{31}$$

Si $W_a \gg P_j$, P_d, P_{ex}, nous pouvons considérer que ces pertes n'affectent pas l'énergie emmagasinée W_a et introduire des coefficients de surtension partiels Q_j, Q_d, Q_{ex} en prenant pour référence le même ωW_a. Dans ces conditions :

$$\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{1}{Q_j} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{ex}} \tag{32}$$

Les inverses des coefficients de surtension partiels s'ajoutent et l'inverse du coefficient de surtension de la cavité est la somme des inverses des coefficients de surtension partiels. Nous voyons donc que toute cause de pertes supplémentaire a pour effet de diminuer la surtension de la cavité.

Le coefficient de surtension interne (ou propre) Q_{pr} est défini par :

$$\frac{1}{Q_{pr}} = \frac{1}{Q_j} + \frac{1}{Q_d} \tag{33}$$

Il est dû uniquement aux pertes dans les parois et le diélectrique de la cavité. Nous pouvons écrire alors :

$$\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{1}{Q_{pr}} + \frac{1}{Q_{ex}} = \frac{1}{Q_{pr}}(1 + \beta) \tag{34}$$

avec :

$$\beta = \frac{Q_{pr}}{Q_{ex}} \tag{35}$$

β est le coefficient de couplage de la cavité au circuit extérieur.

- Si $\beta < 1$, la cavité est dite sous-couplée : les pertes extérieures sont inférieures aux pertes propres.
- Si $\beta > 1$, la cavité est dite sur-couplée : les pertes extérieures sont supérieures aux pertes propres.
- Si $\beta = 1$, la cavité est au couplage critique.

15.4.3 Calcul de Q_j

■ La puissance moyenne perdue par effet Joule dans les parois est :

$$P_j = \frac{1}{2} R_S \int_S \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dS \tag{36}$$

avec S, surface des parois de la cavité et R_S, résistance superficielle des parois de conductivité σ_1. Si δ_S est la profondeur de pénétration des courants dans les parois, due à l'effet de Peau :

$$R_S = \frac{1}{\sigma_1 \delta_S} \tag{37}$$

avec

$$\delta_S = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_1 \sigma_1 f}} \tag{38}$$

En écrivant : $R_S = \omega \mu_1 \delta_S / 2$, nous obtenons :

$$P_j = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega \mu_1 \delta_S}{2} \int_S \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dS \tag{39}$$

■ Le coefficient de surtension Q_j dû aux pertes dans les parois est donc :

$$Q_j = \omega \left| \frac{1}{2} \mu \int_V \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dv \right| \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega \mu_1 \delta_S}{2} \int_S \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dS \right|^{-1} \tag{40}$$

Compte tenu de ce que $\mu = \mu_1$, il vient :

$$Q_j = \frac{2}{\delta_S} \left| \int_V \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dv \right| \left| \int_S \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dS \right|^{-1} \tag{41}$$

En introduisant le volume V de la cavité et la surface S des parois :

$$Q_j = \frac{2}{\delta_S} \cdot \frac{V}{S} \left| \frac{1}{V} \int_V \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dv \right| \left| \frac{1}{S} \int_S \underline{H} \cdot \underline{H}^* \, dS \right|^{-1} \tag{42}$$

Finalement :

$$Q_j = \frac{2}{\delta_S} \cdot \frac{V}{S} F \tag{43}$$

F est un facteur de forme égal au rapport des valeurs moyennes du champ magnétique dans le volume V (1er crochet) et sur la surface S (2e crochet) de la

cavité. Ce facteur, qui dépend de la géométrie de la cavité et du mode de résonance étudié, est compris entre 0,1 et 1. On en trouvera dans *[68, p.74 et 75]* les expressions pour divers types de cavités.

La fréquence qui intervient dans le calcul de δ_S est la fréquence de résonance de la cavité. Donc, δ_S est proportionnel à la racine carrée de la longueur d'onde de résonance. Par ailleurs, V/S qui est homogène à une longueur, est donc proportionnel à la longueur d'onde de résonance ; finalement :

$$Q_j = K\sqrt{\lambda_{res}} \tag{44}$$

La surtension des cavités ne pourra donc pas atteindre des valeurs très élevées en ondes millimétriques où l'on devra utiliser des résonateurs spécifiques (voir § 15.8.2 « Résonateurs en ondes millimétriques »).

Notons enfin que, pour une fréquence de résonance donnée, Q_j est proportionnel à $\sqrt{\sigma_1}$: il est donc possible d'augmenter Q_j en élevant la conductivité des parois, ce qui peut être obtenu à basse température, avec des parois supraconductrices.

15.4.4 Calcul de Q_d

- Soit une cavité remplie d'un diélectrique à pertes, présentant donc une certaine conductivité σ. Ce diélectrique peut être caractérisé par la permittivité complexe :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - j\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon_0}\right) \tag{45}$$

 $\underline{\varepsilon}$ est écrit sous la forme $\varepsilon_0(\varepsilon' - j\varepsilon'')$.

- La puissance moyenne perdue dans le diélectrique est :

$$P_d = \frac{1}{2}\sigma\int_V \underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dv \tag{46}$$

- Le coefficient de qualité dû aux pertes dans le diélectrique est donc :

$$Q_d = \omega\left|\frac{1}{2}\varepsilon\int_V \underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dv\right|\left|\frac{1}{2}\sigma\int_V \underline{E}\cdot\underline{E}^*\,dv\right|^{-1} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \tag{47}$$

Or $\omega\varepsilon/\sigma = \varepsilon'/\varepsilon''$ est l'inverse de la tangente de l'angle de pertes du diélectrique.

D'où :

$$Q_d = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta} \tag{48}$$

Ce coefficient de qualité est donc indépendant des dimensions de la cavité et de son mode de résonance. Il ne dépend que des pertes du diélectrique remplissant la cavité. En hyperfréquences, les meilleurs diélectriques homogènes ont un

tg $\delta = 10^{-4}$, ce qui limite Q_d à 10^4. Pour obtenir des coefficients de qualité plus élevés, il faudra donc utiliser des cavités vides ou remplies d'air.

15.5 MODÉLISATION D'UNE CAVITÉ – IMPÉDANCE D'ENTRÉE

Pour qu'une cavité résonnante puisse être utilisée en pratique, elle doit être couplée avec d'autres éléments extérieurs et être excitée par une source à une fréquence voisine de l'une de ses fréquences propres. La cavité fonctionne alors en oscillations forcées.

15.5.1 Modélisation

Vu de la ligne ou du guide d'accès à la cavité, l'ensemble situé au-delà d'un plan de référence P_1 peut être considéré comme une charge. Celle-ci est caractérisée par son coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}$ ou par l'impédance ou l'admittance réduite qu'elle ramène en ce plan. Ces paramètres sont reliés par :

$$z = \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}} \qquad (49) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1 - \underline{\Gamma}}{1 + \underline{\Gamma}} \qquad (50)$$

$\underline{\Gamma}$ pourra être déterminé par les méthodes de mesure classiques effectuées sur la voie d'accès ; on en déduira z et y. Par ailleurs, s'il est possible d'exprimer z et y en fonction des paramètres caractéristiques de la cavité que sont ω_0, β et Q_{pr}, on pourra calculer ces derniers en déterminant $\underline{\Gamma}$ à trois fréquences différentes.

Le comportement d'une cavité résonnante étant identique à celui d'un circuit résonnant, nous allons nous servir des résultats, bien connus, de ces circuits pour identifier une cavité résonnante à un circuit résonnant et calculer ainsi l'impédance ou l'admittance d'entrée d'une cavité.

Soit une cavité qui, lorsqu'elle est isolée, résonne à une pulsation propre ω_0 et a un coefficient de qualité propre Q_{pr}. Cette cavité est un circuit accordé à constantes (R, L, C) réparties. Représentons-la par un circuit à constantes (R, L, C) localisées (fig. 8) : ce peut être soit un circuit résonnant série (R_S, L_S, C_S) soit un circuit résonnant parallèle (R_p, L_p, C_p).

Pour qu'il y ait équivalence entre la cavité et chacun des deux circuits, il faut que ces derniers présentent la même fréquence de résonance et le même coefficient de qualité que la cavité, soit :

a) $$L_S C_S \omega_0^2 = 1 \qquad (51)$$

$$\frac{L_S \omega_0}{R_S} = Q_{pr} \tag{52}$$

b)

$$L_p C_p \omega_0^2 = 1 \tag{53}$$

$$R_p C_p \omega_0 = Q_{pr} \tag{54}$$

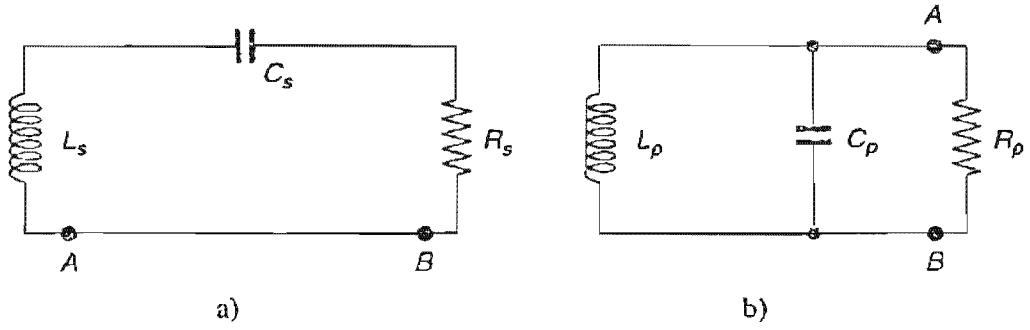


Figure 8. Modélisation d'une cavité résonnante par un circuit résonnant série (fig. 8a) ou parallèle (fig. 8b).

Remarquons que les couples de relations a) et b) contiennent les trois paramètres caractéristiques R, L, C et que, par conséquent, ils ne pourront être déterminés qu'à une constante de proportionnalité près.

15.5.2 Impédance d'entrée

Supposons maintenant que la cavité est couplée à un circuit extérieur, mais que le couplage est infinitésimal, c'est-à-dire suffisamment petit pour que l'on puisse considérer que ω_0 et Q_{pr} restent inchangés.

Pour étudier l'équivalence de ce cas avec le circuit résonnant à couplage infinitésimal, nous devons nous préoccuper de calculer l'impédance d'entrée des circuits résonnants série et parallèle entre leurs bornes A et B :

- l'impédance d'entrée du circuit résonnant série est :

$$Z_S(\omega) = R_S \left| 1 + j\, Q_{pr} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right| \tag{55}$$

- l'impédance d'entrée du circuit résonnant parallèle est :

$$Z_{//}(\omega) = R_p \left| 1 + j\, Q_{pr} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right|^{-1} \tag{56}$$

Ces impédances doivent être égales à l'impédance d'entrée Z_e de la cavité. Or, nettement en dehors de la résonance ($\omega \gg \omega_0$ ou $\omega \ll \omega_0$), Z_S est très élevée et $Z_{//}$ est très faible tandis que Z_e doit être presque nulle puisque le trou de couplage qui est tout petit est équivalent à un court-circuit.

Par conséquent, le plan de référence où sera comptée l'impédance d'entrée de la cavité doit être pris, sur la ligne d'accès à la cavité :

- en un maximum d'impédance, soit à $(2n + 1)\,\lambda/4$ de l'interface de couplage si la modélisation est celle du circuit résonnant série ;
- en un minimum d'impédance, soit à $n\lambda/2$ de l'interface de couplage si la modélisation est celle du circuit résonnant parallèle.

À côté des paramètres ω_0 et Q_{pr} qui sont accessibles au calcul ou à l'expérience, il subsiste encore un paramètre R_p ou R_S qui est indéterminé. Nous allons voir, dans ce qui suit comment peut être levée cette indétermination.

Dans le cas où la cavité est couplée au circuit extérieur par un couplage qui n'est plus nécessairement infinitésimal, supposons que la voie d'accès, d'impédance caractéristique Z_0, est adaptée à son extrémité opposée à la cavité et raisonnons en impédances réduites.

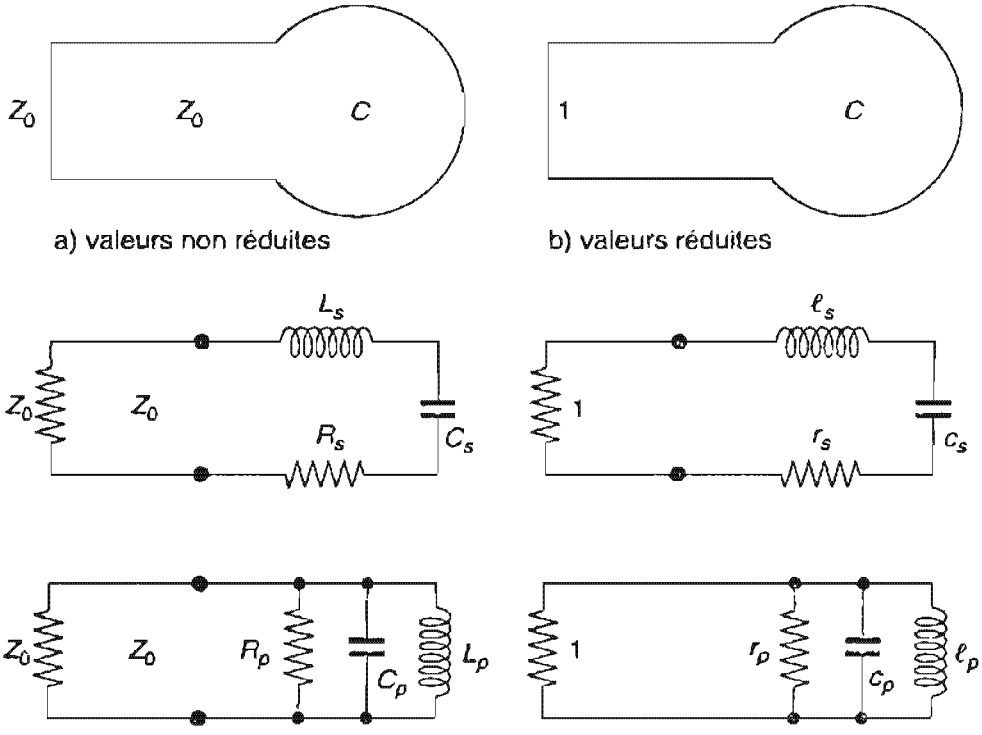


Figure 9. Modélisation d'une cavité résonnante couplée à un circuit extérieur : *a.* en impédances non réduites, *b.* en impédances réduites.

- Dans le cas série :

$$z_S(\omega) = r_S \left| 1 + j\, Q_{pr} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right| \tag{57}$$

Or, nous avons dans ce cas, puisque $z_0 = 1$:

$$Q_{ex} = \frac{\ell_S\, \omega_0}{z_0} = \frac{1}{z_0\, c_S\, \omega_0} = \ell_S\, \omega_0 = \frac{1}{c_S\, \omega_0} \tag{58}$$

$$Q_{pr} = \frac{\ell_S\, \omega_0}{r_S} = \frac{1}{r_S\, c_S\, \omega_0} \tag{59}$$

d'où : $$r_S = \frac{Q_{ex}}{Q_{pr}} = \frac{1}{\beta} \tag{60}$$

$$\Rightarrow \quad z_S(\omega) = \frac{1}{\beta}\left[1 + j\, Q_{pr}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \tag{61}$$

- Dans le cas parallèle :

$$z_{//}(\omega) = r_p\left[1 + j\, Q_{pr}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^{-1} \tag{62}$$

Nous avons, de même, dans ce cas :

$$Q_{ex} = \frac{z_0}{\ell_p\, \omega_0} = z_0\, c_p\, \omega_0 = \frac{1}{\ell_p\, \omega_0} = c_p\, \omega_0 \tag{63}$$

$$Q_{pr} = \frac{r_p}{\ell_p\, \omega_0} = r_p\, c_p\, \omega_0 \tag{64}$$

d'où : $$r_p = \frac{Q_{pr}}{Q_{ex}} = \beta \tag{65}$$

$$\Rightarrow \quad z_{//}(\omega) = \beta\left[1 + j\, Q_{pr}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^{-1} \tag{66}$$

Nous disposons désormais d'expressions de l'impédance d'entrée réduite qui peuvent être déterminées uniquement à partir des paramètres β, Q_{pr} et ω_0 accessibles au calcul ou à l'expérience. L'expression z_S ($z_{//}$) est à utiliser si le plan de référence des impédances réduites est pris en un maximum (minimum) d'impédance sur la voie d'accès.

Dans le cas où la cavité est couplée par un petit iris, l'impédance d'entrée dans le plan de couplage est à peu près nulle en dehors de la résonance. Il convient donc d'utiliser la modélisation de la cavité par un circuit résonnant parallèle, en prenant le plan de couplage de la cavité comme plan de référence pour son impédance réduite. *C'est donc l'expression* $z_{//}(\omega)$ *et cette convention que nous utiliserons désormais pour calculer l'impédance d'entrée de la cavité résonnante.*

15.5.3 Représentation sur le diagramme de Smith de y_e

L'admittance d'entrée de la cavité est donnée par :

$$y_e = \frac{1}{\beta}\left[1 + j\, 2x\, Q_{pr}\right] \tag{67}$$

$$2x = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \tag{68}$$

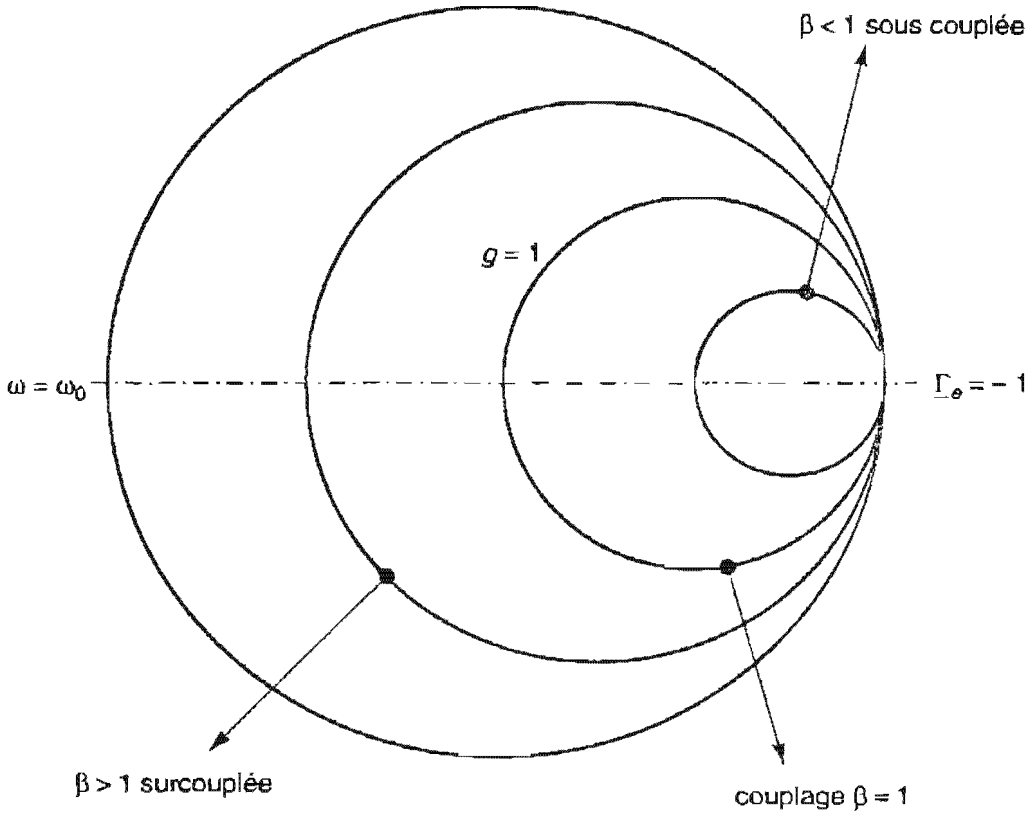


Figure 10. Représentation sur le diagramme de Smith des domaines d'une cavité sur-couplée ou sous-couplée.

Sur l'abaque de Smith, y_e se déplace sur un cercle représentatif de la valeur réelle $1/\beta$.

Ce cercle coupe l'axe des abscisses en $y_e = 1/\beta$ pour $\omega = \omega_0$:

- si ce point se trouve à l'extérieur du cercle $g = 1$, $1/\beta < 1$ et $\beta > 1$, la cavité est dite sur-couplée ;
- si ce point se trouve à l'intérieur du cercle $g = 1$, $1/\beta > 1$ et $\beta < 1$, la cavité est dite sous-couplée ;
- si ce point se trouve sur le cercle $g = 1$, $\beta = 1$, la cavité est au couplage critique.

Loin de la résonance, $y_e = (1/\beta)\, j\, 2x\, Q_{pr} = jX$ avec $X \gg 1$.

Donc, le coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_e$ à l'entrée de la cavité est :

$$\underline{\Gamma}_e = \frac{1 - jX}{1 + jX} \simeq -1$$

La cavité se comporte donc comme un court-circuit.

15.6 CAVITÉS COUPLÉES PAR UN ACCÈS

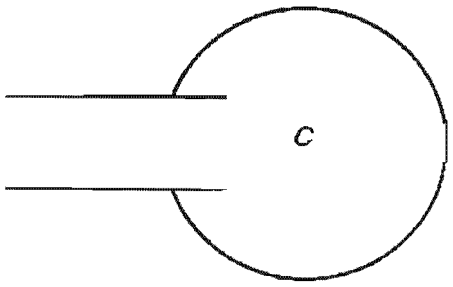


Figure 11. Cavité couplée par un seul accès.

Une telle cavité (fig. 11) fonctionne en réflexion ou en absorption et, pour en expliquer le fonctionnement, il faut faire l'étude du coefficient de réflexion qui s'exprime en fonction de l'impédance ou de l'admittance réduite de la cavité.

15.6.1 Puissance réfléchie – Puissance transmise à la cavité

Nous venons de démontrer que l'impédance d'entrée de la cavité est donnée, en valeur réduite, par :

$$z_e = \beta \left[1 + j\, Q_{pr}\, 2x\right]^{-1} \quad \text{avec} \quad 2x = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \tag{69}$$

en prenant le plan du couplage comme plan de référence.

Rappelons que cette impédance a été calculée en modélisant la cavité par un circuit résonnant qui prend en compte toutes les causes de pertes, y compris celles qui sont dues au couplage avec le circuit extérieur. Par conséquent, le coefficient de réflexion $\underline{\Gamma}_e$ qui lui correspond permettra de calculer la réflexion globale de la cavité que l'on pourrait mesurer en intercalant un coupleur directif entre elle et le générateur.

a) Loin de la résonance

$$\text{Si } \omega > \omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} > 0 \quad \rightarrow \quad z_e = \beta \left[1 + j\, Q_{pr}\, (2x > 0)\right]^{-1}$$

Donc : $$z_e = r_e + j\, x_e \quad \text{avec} \quad x_e < 0 \tag{70a}$$

$$\text{Si } \omega < \omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} < 0 \quad \rightarrow \quad z_e = \beta \left[1 + j\, Q_{pr}\, (2x < 0)\right]^{-1}$$

Donc : $$z_e = r_e + j\, x_e \quad \text{avec} \quad x_e > 0 \tag{70b}$$

Dès que ω n'est pas très voisin de ω_0 – et comme Q_{pr} est très grand – nous pouvons négliger 1 devant $2x\, Q_{pr}$, alors :

$$z_e = -\frac{j\beta}{2x\, Q_{pr}} \quad \text{avec} \quad \frac{\beta}{2x\, Q_{pr}} \ll 1 \tag{71}$$

(les valeurs de β, en général voisines de 1, n'excèdent jamais quelque dizaines). Dans ces conditions :

$$\underline{\Gamma}_e = \frac{z_e - 1}{z_e + 1} \simeq -1 \tag{72}$$

$\Gamma_e^2 = 1$. La puissance réfléchie par la cavité est maximale et aucune puissance ne pénètre à l'intérieur de la cavité.

b) Au voisinage de la résonance ($\omega \simeq \omega_0$)

À partir de $z_e = \beta\,[1 + Q_{pr}\,2x]^{-1}$, nous pouvons calculer Γ_e :

$$\Gamma_e = \left|\frac{z_e - 1}{z_e + 1}\right| = \left|\frac{\beta - 1 - j\,Q_{pr}\,2x}{\beta + 1 + j\,Q_{pr}\,2x}\right| \tag{73}$$

d'où nous déduisons :

$$\rightarrow\ \Gamma_e^2 = 1 - \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2 + (2x\,Q_{pr})^2} \tag{74}$$

qui correspond à la puissance réfléchie par la cavité.

$$\rightarrow\ 1 - \Gamma_e^2 = \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2 + (2x\,Q_{pr})^2} \tag{75}$$

qui correspond à la puissance transmise à la cavité.

Comme $\beta = Q_{pr}\,/\,Q_{ex}$ et $\beta + 1 = Q_{pr}\,/\,Q_{ch}$, il vient :

$$1 - \Gamma_e^2 = \frac{K}{1 + (2x\,Q_{ch})^2} \tag{76}$$

avec :

$$K = 4\,\frac{Q_{ch}^2}{Q_{pr}\,Q_{ex}} \tag{77}$$

La courbe des variations de $1 - \Gamma_e^2$ (fig. 12) qui représente la variation de la puissance transmise à la cavité est donnée par :

$$\frac{P_{cav}}{P_{inc}} = \frac{K}{1 + (2x\,Q_{ch})^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \tag{78}$$

On peut également tracer la courbe des variations (fig. 12) de Γ_e^2 qui correspond à la puissance réfléchie par la cavité ; elle est donnée par :

$$\frac{P_{réf}}{P_{cav}} = 1 - \frac{K}{1 + (2x\,Q_{ch})^2} \tag{79}$$

Ces deux courbes sont complémentaires et à la résonance $x = 0$; donc $P_{cav}/P_{inc} = K$ et $P_{réf}\,/\,P_{inc} = 1 - K$.

La valeur de K peut être étalonnée car nous verrons (au c)) qu'à la résonance :

$$\Gamma_e^2 = \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)^2 \quad \rightarrow \quad K = 1 - \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)^2 \tag{80}$$

La valeur maximale de K, qui est 1, est atteinte pour $\beta = 1$.

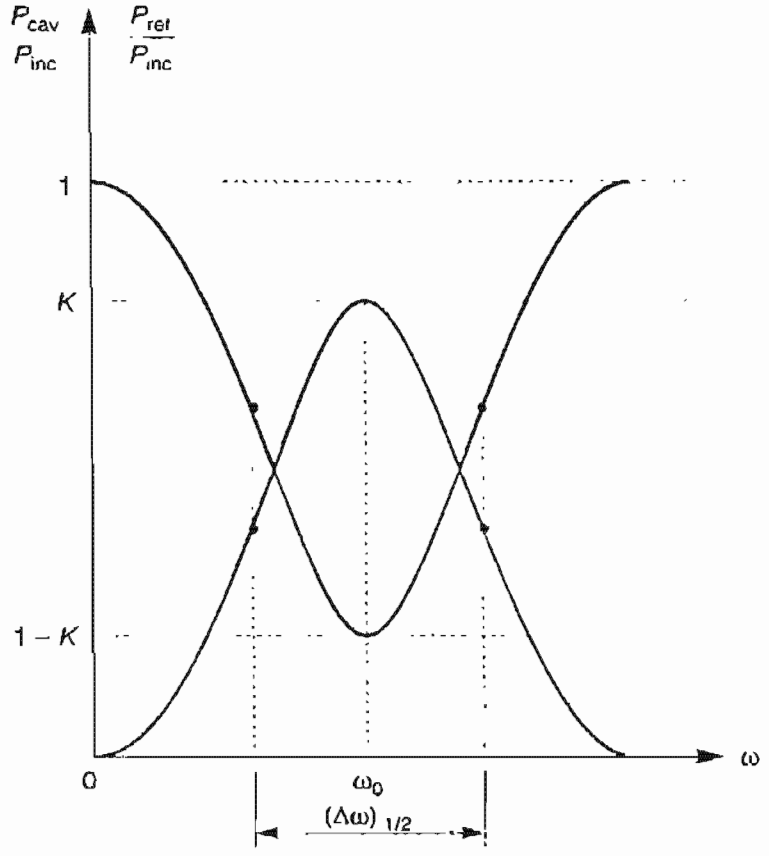


Figure 12. Courbes des variations de la puissance transmise à la cavité et de la puissance réfléchie par la cavité.

Sur ces courbes, les points à mi-niveau sont obtenus pour x tel que $2x\ Q_{ch} = 1$. Soit $(\Delta\omega)_{1,2}$ la différence des deux pulsations pour lesquelles ce niveau est obtenu :

$$Q_{ch} = \frac{1}{2x} = \frac{\omega_0}{(\Delta\omega)_{1,2}} \tag{81}$$

Ainsi, Q_{ch} se mesure à partir de ω_0 et de $(\Delta\omega)_{1/2}$.

c) À la résonance ($\omega = \omega_0$)

$$z_e = \beta \quad \rightarrow \quad \underline{\Gamma}_e = \frac{z_e - 1}{z_e + 1} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \tag{82}$$

D'après les courbes tracées, nous voyons que la puissance transmise à la cavité est maximale tandis que la puissance réfléchie est minimale :

$$\text{Si } \beta > 1, \qquad \Gamma_e = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \rightarrow \beta = \frac{1 + \Gamma_e}{1 - \Gamma_e} = \text{R.O.S.} \tag{83}$$

$$\text{Si } \beta < 1, \qquad \Gamma_e = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \rightarrow \beta = \frac{1 - \Gamma_e}{1 + \Gamma_e} = \frac{1}{\text{R.O.S.}} \tag{84}$$

La mesure du R.O.S. permet donc de déterminer β ou $1/\beta$ sans qu'il soit possible de savoir lequel. Cette indétermination ne pourra être levée qu'en prenant en considération le changement de phase à la réflexion (voir § 15.6.2).

15.6.2 Interprétation physique du fonctionnement de la cavité

Loin de la résonance

Nous avons vu que la cavité se comporte comme un court-circuit. Elle réfléchit donc la totalité de l'énergie que lui envoie le générateur et elle n'accumule aucune énergie en son sein. Le R.O.S. dans la ligne d'alimentation sera donc très élevé.

Près de la résonance

z_e est complexe et $\Gamma_e < 1$. La cavité ne se comporte plus comme un court-circuit et le R.O.S. diminue dans la ligne d'alimentation. Par conséquent, une partie de l'énergie envoyée par le générateur est réfléchie directement sur l'interface d'entrée ; une autre partie est transmise à l'intérieur de la cavité où l'onde qu'elle produit subit de multiples réflexions sur les parois de la cavité.

Cette énergie transmise à l'intérieur de la cavité engendre :

- de l'énergie emmagasinée sous forme stationnaire (réactive),
- de l'énergie active qui compense les pertes dans les parois et le diélectrique,
- de l'énergie active qui est rayonnée vers l'extérieur à travers l'ouverture de couplage.

Dans la ligne qui relie la cavité au générateur, il y a une onde réfléchie qui se compose :

- de l'onde réfléchie directement sur l'interface d'entrée de la cavité,
- de l'onde rayonnée par la cavité à travers cet interface.

Il est très important de noter que les puissances transportées par ces ondes ne s'additionnent pas obligatoirement. En effet, elles correspondent à des ondes se propageant dans la même direction mais qui ne sont pas forcément en phase. En particulier, il peut se produire que ces ondes soient en opposition de phase,

auquel cas les puissances qu'elles transportent se retranchent et pourront s'annuler.

À la résonance

$z_e = \beta$ est réelle. Le coefficient de réflexion $\Gamma_e = (\beta - 1)/(\beta + 1)$ est réel et passe par sa valeur minimale ainsi que le R.O.S. dans la ligne d'alimentation de la cavité. L'onde transmise à la cavité est maximale.

Notons que si $\beta > 1$, Γ_e est positif : il y a réflexion sans changement de phase ; tandis que si $\beta < 1$, Γ_e est négatif : il y a réflexion avec un déphasage de 180°. Comme en dehors de la résonance, la réflexion s'effectue avec un déphasage de 180° ($\Gamma_e = -1$), l'examen du comportement de la phase quand la cavité est désaccordée permettra de savoir si cette cavité est sur-couplée (auquel cas la phase change de 180° entre ω_0 et $\omega \neq \omega_0$) ou si elle est sous-couplée (auquel cas la phase ne change pas entre ω_0 et $\omega \neq \omega_0$).

Dans le cas particulier où $\beta = 1$, $\Gamma_e = 0$: il n'y a pas de réflexion sur la cavité bien qu'il y ait une onde rayonnée par la cavité vers l'extérieur (puisque $\beta = 1$: $P_{ex}/P_{pr} = 1$ d'où $P_{ex} = P_{pr}$). Ceci signifie que l'onde rayonnée par la cavité vers l'extérieur et l'onde réfléchie sur l'interface de couplage sont d'amplitudes égales et en opposition de phase, de sorte que les puissances qu'elles transportent doivent être retranchées et qu'elles s'annulent.

15.7 CAVITÉ COUPLÉE PAR DEUX ACCÈS

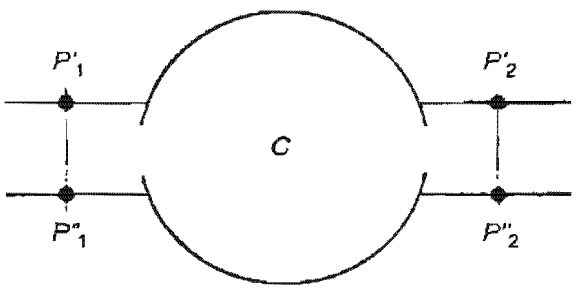


Figure 13. Cavité couplée par deux accès.

Considérons une cavité ayant deux accès par lesquels elle se trouve couplée d'une part à une source et d'autre part à une charge (fig. 13). Cette cavité fonctionne en absorption à l'accès relié à la source et en émission à l'accès relié à la charge. Globalement, elle fonctionne en transmission de la source vers la charge. Soient :

P_i, la puissance incidente,

P_d, la puissance dissipée dans l'ensemble cavité + charge,

P_t, la puissance transmise à la charge.

Nous nous proposons de déterminer :

$\tau_a = P_d/P_i$, coefficient de transfert de la cavité en absorption ;

$\tau_e = P_t/P_d$, coefficient de transfert de la cavité en émission ;

$\tau_t = P_t/P_i$, coefficient de transfert de la cavité en transmission ou coefficient de transmission.

Nous avons évidemment : $$\tau_t = \tau_a \cdot \tau_e \tag{85}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le schéma équivalent à ce montage (fig. 14) où :

- les éléments r_p, ℓ_p, c_p sont propres à la cavité isolée,
- les éléments r_{p1} et r_{p2} représentent les résistances internes de la source et de la charge sur lesquelles est dissipée la puissance perdue à travers les couplages d'entrée et de sortie.

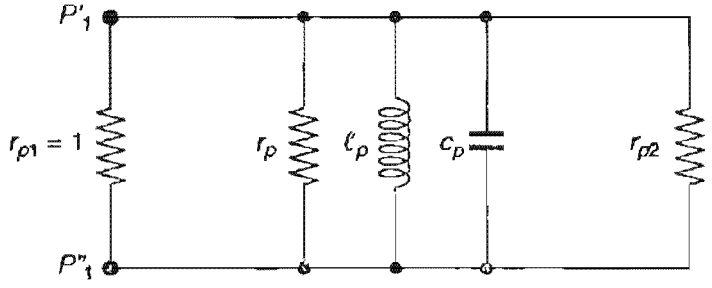


Figure 14. Modélisation par un circuit parallèle d'une cavité couplée par deux accès.

Toutes ces impédances sont normalisées par rapport à une impédance de référence qui est souvent l'impédance caractéristique des lignes d'accès à la cavité.

Si la ligne est adaptée à la source du côté de l'entrée, nous avons $r_{p1} = 1$.

■ Compte tenu des résultats établis au paragraphe 15.5 :

- les relations caractéristiques de la cavité sont :

$$\ell_p\, c_p\, \omega_0^2 = 1 \tag{86}$$

et $$Q_{pr} = \frac{r_p}{\ell_p\, \omega_0} = r_p\, c_p\, \omega_0 \tag{87}$$

- les relations correspondant au couplage d'entrée sont :

$$Q_{ex1} = \frac{r_{p_1}}{\ell_p\, \omega_0} = r_{p_1}\, c_p\, \omega_0 \tag{88}$$

et $$\beta_1 = \frac{Q_{pr}}{Q_{ex1}} = \frac{r_p}{r_{p_1}} \tag{89}$$

- les relations correspondant au couplage de sortie sont les mêmes en remplaçant les indices 1 par des indices 2,
- le coefficient de surtension en charge est :

$$\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{1}{Q_{pr}} + \frac{1}{Q_{ex1}} + \frac{1}{Q_{ex2}} = \frac{1}{Q_{pr}}(1 + \beta_1 + \beta_2) \tag{90}$$

L'impédance d'entrée de l'ensemble cavité + charge se calcule par une relation du type de celle donnée au paragraphe 15.5 :

$$z_{//} = r_p \left| 1 + j\, Q_{pr}\, 2x \right|^{-1} \quad \text{avec} \quad 2x = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \tag{91}$$

à condition d'y remplacer r_p par un r'_p tel que :

$$\frac{1}{r'_p} = \frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_{p_2}} \rightarrow r'_p = \frac{r_p\, r_{p_2}}{r_p + r_{p_2}} = \frac{\beta_1}{1+\beta_2} \tag{92}$$

et Q_{pr} par un Q'_{pr} tel que :

$$\frac{1}{Q'_{pr}} = \frac{1}{Q_{pr}} + \frac{1}{Q_{ex2}} = \frac{1}{Q_{pr}}\left(1 + \frac{Q_{pr}}{Q_{ex2}}\right) = \frac{1}{Q_{pr}}(1+\beta_2) \tag{93}$$

Donc :
$$z_e = \frac{\beta_1}{1+\beta_2}\left|1 + j\,\frac{Q_{pr}}{1+\beta_2}\,2x\right|^{-1} \tag{94}$$

et :
$$y_e = \frac{1+\beta_2}{\beta_1}\left[1 + j\,\frac{Q_{pr}}{1+\beta_2}\,2x\right] \tag{95}$$

Dans ces conditions, le coefficient de réflexion à l'entrée de la cavité est :

$$\Gamma_e = \frac{1-y_e}{1+y_e} = \frac{-(1-\beta_1+\beta_2) - j\,Q_{pr}\,2x}{1+\beta_1+\beta_2+j\,Q_{pr}\,2x} \tag{96}$$

Nous pouvons en déduire :

- la puissance réfléchie à l'entrée de la cavité :

$$\frac{P_r}{P_i} = \Gamma_e^2 = \frac{(1-\beta_1+\beta_2)^2 + Q_{pr}^2\,(2x)^2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2 + Q_{pr}^2\,(2x)^2} \tag{97}$$

- la puissance dissipée dans la cavité :

$$\frac{P_d}{P_i} = 1 - \Gamma_e^2 = \frac{4\,\beta_1\,(1+\beta_2)}{(1+\beta_1+\beta_2)^2 + Q_{pr}^2\,(2x)^2} = \tau_a \tag{98}$$

Par ailleurs, un calcul simple basé sur la considération du circuit équivalent où les puissances dissipées sont inversement proportionnelles aux résistances correspondantes, permet d'établir que :

$$\frac{P_t}{P_d} = \frac{r_p}{r_p + r_{p_2}} = \frac{\beta_2}{1+\beta_2} = \tau_e \tag{99}$$

Finalement, nous trouvons le coefficient de transmission de la cavité utilisée en transmission :

$$\tau_t = \tau_a\,\tau_e = \frac{4\,\beta_1\,\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2 + Q_{pr}^2\,(2x)^2} \tag{100}$$

Comme $Q_{ch} = Q_{pr}/(1 + \beta_1 + \beta_2)^2$, nous avons aussi :

$$\tau_t = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2\left|1+Q_{ch}^2(2x)^2\right|} \tag{101}$$

Remarque

Nous voyons que $\tau_t = 0{,}5\ \tau_t(\omega_0)$ pour des pulsations ω, proches de ω_0, pour lesquelles : $Q_{ch}^2(2x)^2 = 1$.

d'où
$$Q_{ch} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{1\ 2}} \tag{102}$$

$\Delta\omega_{1\ 2}$ est l'écart entre les deux pulsations situées de part et d'autre de ω_0, pour lesquelles la puissance transmise par la cavité a diminué de moitié par rapport à la résonance.

■ À la résonance, $x = 0$ et par conséquent :

$$\Gamma_e = -\frac{1-\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1+\beta_2} \tag{103}$$

$$\tau_a = \frac{4\beta_1(1+\beta_2)}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \tag{104}$$

$$\tau_e = \frac{\beta_2}{1+\beta_2} \tag{105}$$

$$\tau_t = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \tag{106}$$

Nous pouvons faire, sur ces relations, quelques remarques intéressantes :

1) L'adaptation ($\Gamma_e = 0$) nécessite que $\beta_1 = 1 + \beta_2$. Il n'est donc pas possible de l'obtenir avec des couplages identiques ($\beta_1 = \beta_2$). À l'adaptation :

$$\tau_a = 1 ; \quad \tau_e = \frac{\beta_2}{1+\beta_2} ; \quad \tau_t = \frac{\beta_2}{1+\beta_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

2) Le coefficient de transmission est maximal pour $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ et alors :

$$\tau_t = \frac{4\beta^2}{(1+2\beta)^2} = \left(1 - \frac{Q_{ch}}{Q_{pr}}\right)^2 \tag{107}$$

3) Le coefficient de transmission est d'autant plus proche de 1 que β_1 et β_2 sont grands (cavité fortement sur-couplée) mais simultanément Q_{ch} diminue beaucoup et la résonance de la cavité est moins nette.

Notons enfin que Boudouris *[69, p. 145]* a établi la matrice S du quadripôle que constitue la cavité en transmission :

$$S = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + y_c} \begin{vmatrix} (\beta_1 - \beta_2 - y_c) & 2\sqrt{\beta_1 \beta_2} \\ 2\sqrt{\beta_1 \beta_2} & (\beta_2 - \beta_1 - y_c) \end{vmatrix} \tag{108}$$

où y_c est l'admittance de la cavité isolée avec $r_p = 1$:

$$y_c = 1 + j\, Q_{pr} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \tag{109}$$

15.8 APPLICATIONS DES CAVITÉS

15.8.1 Détermination de l'indice ou de la permittivité d'un gaz

L'indice de réfraction complexe est $\underline{n} = n' - j\, n''$.

La permittivité complexe est : $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon' - j\, \varepsilon''$.

Calculons $\underline{n} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r}$ en tenant compte de ce que, pour un gaz $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$:

$$\sqrt{\underline{\varepsilon}_r} = \sqrt{\varepsilon'} \sqrt{1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} = \sqrt{\varepsilon'} \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right)$$

En identifiant avec $\underline{n} = n' - j\, n''$, nous obtenons :

$$n' = \sqrt{\varepsilon'} \tag{110}$$

$$n'' = \frac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\varepsilon''}{2n'} \tag{111}$$

Détermination de n' et de ϵ'

La fréquence de résonance est :

- pour la cavité vide : $f_0 = c/\lambda$,
- pour la cavité remplie de diélectrique : $f_d = v/\lambda = c/n'\lambda$.

D'où :

$$n' = \frac{f_0}{f_d} \tag{112}$$

Nous avons aussi : $n' = \left(1 - \frac{\Delta f}{f_0}\right)^{-1}$ avec $\Delta f = f_0 - f_d$ (113a)

Et si $\Delta f / f_0 \ll 1$: $n' = 1 + \frac{\Delta f}{f_0}$ (113b)

→ n' et ε' peuvent être calculés à partir de la variation de la fréquence de résonance.

b) Détermination de n'' et ε''

Rappelons que : $\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{ex}}$ (114)

- pour la cavité vide : $\left(\frac{1}{Q_{ch}}\right)_1 = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ex}}$ (115)
- pour la cavité remplie de diélectrique :

$$\left(\frac{1}{Q_{ch}}\right)_2 = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ex}} + \frac{1}{Q_d} \quad (116)$$

D'où : $\frac{1}{Q_d} = \left(\frac{1}{Q_{ch}}\right)_2 - \left(\frac{1}{Q_{ch}}\right)_1$ (117)

Or : $\frac{1}{Q_d} = \operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ et $\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{\Delta f}{f}$

Δf est la largeur de la courbe de réponse de la cavité à – 3 dB.

Donc : $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\Delta f_2}{f_2} - \frac{\Delta f_1}{f_1}$ (118)

d'où ε'' et $n'' = \varepsilon''/2n'$.

→ n'' et ε'' peuvent être calculés à partir de l'élargissement de la courbe de réponse de la cavité.

NB
Rappelons que le rapport $\varepsilon''/\varepsilon' = \operatorname{tg}\delta$ est appelé facteur de pertes du diélectrique et que δ est appelé l'angle de pertes de ce diélectrique.

15.8.2 Résonateurs en ondes millimétriques *[68, p.108-114]*

Les cavités conventionnelles ne conviennent pas en ondes millimétriques : d'une part leur fabrication devient impossible car leurs dimensions devraient être de l'ordre de grandeur de λ ; d'autre part, il n'est pas possible d'obtenir des coefficients de qualité assez élevés, vu qu'ils sont proportionnels à $\sqrt{\lambda}$.

En revanche, des résonateurs analogues à ceux utilisés en optique dans les interféromètres de Fabry-Perot conviennent bien en ondes millimétriques. Ces résonateurs sont des cavités ouvertes constituées de deux réflecteurs (plans, sphériques ou paraboloïdaux, d'ouverture $2a$) placés face à face et séparés par une distance d (fig. 15)

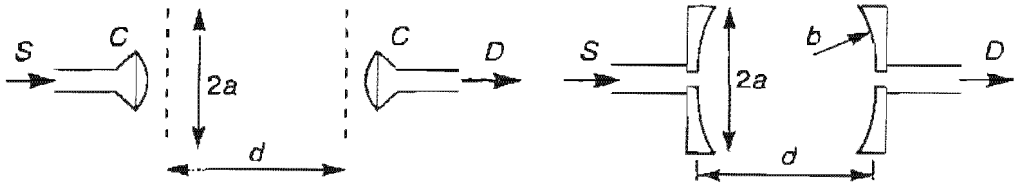


Figure 15. Cavité résonnante ouverte *a.* à réflecteurs plans ou *b.* à réflecteurs sphériques

Les réflecteurs, qui sont métalliques, ont un coefficient de réflexion très voisin de 1. Le couplage avec la source millimétrique est effectué à travers un petit trou percé dans l'un des réflecteurs. L'onde excitée subit des réflexions multiples à l'intérieur de la cavité et l'on démontre *[70, p. 37-45]* que certaines distributions de champ, de type quasi T.E.M., peuvent s'établir et que ce champ se concentre autour de l'axe longitudinal de la cavité. Les modes de fonctionnement sont notés TE_{mnp} où les indices m et n sont liés à la répartition transversale du champ tandis que l'indice p est lié à la variation longitudinale.

La condition de résonance impose que la phase de l'onde varie de 2π ou d'un multiple entier de 2π entre deux réflexions successives. Pour un résonateur ouvert à réflecteurs sphériques, de rayon de courbure b, l'écriture de cette condition donne *[68, p. 111]* :

$$d = \left| 2p + (2n + m + 1)\left(1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b-d}{b+d}\right)\right| \frac{\lambda}{4} \qquad (119)$$

Le coefficient de surtension en charge est donné par :

$$Q_{ch} = \omega \frac{W_a}{P_p} \qquad (120)$$

W_a est l'énergie emmagasinée et P_p la puissance perdue dans le résonateur. En faisant intervenir les coefficients de qualité correspondant aux diverses causes de pertes – par réflexion, par diffraction, par absorption dans le diélectrique et à travers les couplages – nous avons :

$$\frac{1}{Q_{ch}} = \frac{1}{Q_R} + \frac{1}{Q_D} + \frac{1}{Q_A} + \frac{1}{Q_{ex}} = \frac{1}{Q_{pr}} + \frac{1}{Q_{ex}} \qquad (121)$$

Les pertes par diffraction sont, en général, négligeables. Les pertes par absorption peuvent être nulles dans le cas d'une cavité vide : dans ces conditions $Q_{pr} = Q_R$. Quant à Q_R, on démontre (voir exercice 15.8) que :

$$Q_R = \frac{2\pi d}{\lambda \alpha_R} \qquad (122)$$

α_R est la fraction de la puissance P_p représentant les pertes dans les réflecteurs.

Les applications numériques de cette formule montrent que Q_R est de l'ordre de 10^5 à 10^6 en ondes millimétriques, ce qui permet de disposer d'excellentes cavités résonnantes.

15.8.3 Fréquencemètres à cavité

La résonance d'une cavité cylindrique, lorsque sa longueur est égale à un nombre entier de demi-longueurs d'onde, est utilisée pour des mesures de la fréquence de l'onde qui sont d'autant plus précises que la résonance est plus étroite, donc que le coefficient de surtension est plus élevé. Ces fréquencemètres à cavité sont souvent appelés ondemètres.

L'une des bases de la cavité est constituée par un court-circuit mobile dont la position est repérée par une vis micrométrique. L'étalonnage préalable peut être effectué par comparaison avec un étalon de fréquences. La cavité doit toujours être placée en dérivation afin de perturber le moins possible le circuit dans lequel on veut mesurer la fréquence.

Selon la position du détecteur, la cavité peut être utilisée en absorption (fig. 16a) ou en transmission (fig. 16b). Dans le premier cas, la résonance est indiquée par un minimum du signal détecté tandis que dans le second cas, le signal détecté, qui était nul en dehors de la résonance, passe par un maximum à la résonance. Le second montage est beaucoup plus sensible que le premier.

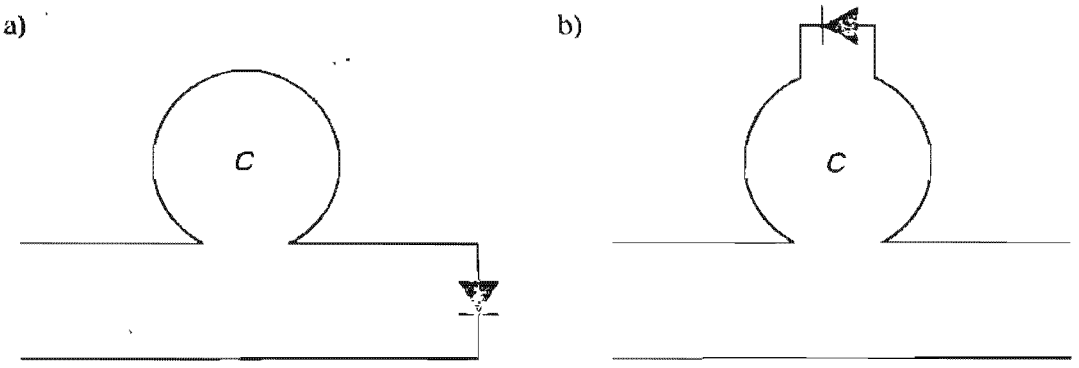


Figure 16. Fréquencemètre à cavité montée en dérivation sur une ligne. Par rapport au détecteur, la cavité est utilisée : *a.* en absorption, ou *b.* en transmission.

Bien que les cavités cylindriques à section rectangulaire fonctionnant en mode TE_{10p} conviennent très bien, ce sont les cavités cylindriques à section circulaire fonctionnant en modes TE_{11p} et TE_{01p} qui sont les plus utilisées. Deux problèmes se posent dans la réalisation de ces cavités :

- obtenir une surtension en charge aussi élevée que possible, ce qui nécessite d'utiliser des couplages avec l'extérieur caractérisés par un coefficient de couplage $\beta \ll 1$ et des longueurs de cavité égales à plusieurs fois $\lambda_g/2$;
- rester en résonance monomode dans une certaine bande autour de la fréquence de résonance. Pour cela, on a intérêt à utiliser le fonctionnement en mode TE_{11p} (qui correspond au mode fondamental TE_{11}). Le fonctionnement en mode TE_{01p} permettrait d'atteindre des précisions de mesure plus élevées (de

l'ordre de 10^{-6} au lieu de 10^{-5}) mais il faudrait alors éliminer les autres modes en utilisant la propriété des modes TE_{01} dont les lignes de courant sont des cercles transversaux.

15.3.4 Autres applications

Les cavités ont bien d'autres applications qu'il n'est pas possible de développer ici. Il convient, toutefois, d'en citer quelques-unes :

- la mesure de ε' et ε'' d'échantillons dont les dimensions sont très petites par rapport à la longueur d'onde. Ces échantillons sont placés à l'intérieur d'une cavité résonnante et la mesure est faite par une méthode de perturbations dont on trouvera un exposé dans *[37, p. 115-121]* ;
- l'utilisation de cavités, appelées rhumbatrons, dans les tubes à vide tels que les klystrons *[46, p. 285]*. Ces cavités interviennent dans l'interaction localisée entre le faisceau d'électrons qui les traverse et l'onde électromagnétique qui règne à l'intérieur d'elles ;
- les circuits électroniques pour micro-ondes où les cavités résonnantes, et notamment les résonateurs diélectriques, sont utilisés en tant que circuits accordés, par exemple pour fixer très précisément la fréquence des oscillateurs à l'état solide utilisant des transistors à effet de champ à l'AsGa *[71, p. 251 et sq]*.

EXERCICES

EXERCICE 15.1

(Paragraphe 15.3.1 – Cavité cylindrique à section rectangulaire)

Une cavité résonnante de section rectangulaire, de dimensions a = 7,5 cm et b = 5 cm a une longueur ℓ = 15 cm. Rechercher les modes dont les fréquences de résonance se trouvent entre 3 et 4 GHz et donner leurs fréquences de résonance (d'après Gardiol *[37, p. 130]*).

EXERCICE 15.2

(Paragraphe 15.3.1 – Cavité cylindrique à section rectangulaire)

Une cavité résonnante parallélépipédique a ses trois premières fréquences de résonance pour 5,196 GHz, 6 GHz et 6,708 GHz. Trouver les dimensions de ses trois côtés a, b (section droite) et ℓ (longueur) (d'après Gardiol *[37, p.130]*).

EXERCICE 15.3

(Paragraphe 15.3.2 – Cavité cylindrique à section circulaire)

Quelle doit être la longueur h d'une cavité cylindrique, à section circulaire de rayon R = 1,5 cm, pour que sa fréquence de résonance en mode fondamental TE_{111} soit de 9 GHz ?

EXERCICE 15.4

(Paragraphe 15.3 – Résonateurs diélectriques)

On considère un résonateur diélectrique à section circulaire tel que celui schématisé sur les figures 6 et 7. Les données sont les suivantes : $\varepsilon_r = 40$; $\varepsilon_{2r} = 2{,}4$ et $f = 10$ GHz.

Par ailleurs, on prend le paramètre $h = 5{,}4/D$.

1) Quelle est la signification physique des conditions exprimées par la double inégalité (18) ? Entre quelles limites doit être compris D ?
2) On prend D = 10 mm ; L_1 = 11,2 mm ; L_2 = 0,8 mm. Calculer la hauteur L du résonateur.

EXERCICE 15.5

(Paragraphe 15.4.3 – Calcul de Q_j)

Le facteur de forme d'une cavité cylindrique à section circulaire de rayon R et de longueur h, fonctionnant en mode TE_{onp} est donné par :

$$F = \frac{u'_{mn}}{2\pi} \cdot \frac{(1 + A^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + A^2 r^3}$$

avec : $r = \dfrac{2R}{h}$ et $A = \dfrac{p\pi}{2u'_{mn}}$

1) Montrer que $F(r)$ passe par un maximum pour une valeur de r que l'on calculera. En déduire l'expression de F_{max}.

2) Calculer la valeur maximale $(Q_j)_M$ du coefficient de surtension dû aux pertes dans les parois, d'une cavité de rayon $R = 6$ cm, fonctionnant en mode TE_{011} à la fréquence de 10 GHz. On prendra $\sigma_1 = 5{,}7 \cdot 10^7$ S/m.

EXERCICE 15.6

(Paragraphe 15.6.1 – Puissance réfléchie – Puissance transmise à la cavité)

1) À la fréquence de résonance d'une cavité, le module de son coefficient de réflexion en champ est 0,33 ; d'autre part, la phase de ce coefficient est la même que lorsque la cavité est en dehors de la résonance. Déterminer le facteur de couplage β.

2) Pour 8 988 MHz et pour 9 012 MHz, la puissance absorbée par cette cavité est la moitié de celle absorbée à la résonance. Déterminer la fréquence de résonance, Q_{ch}, Q_{pr} et Q_{ex}.

EXERCICE 15.7

(Paragraphe 15.8.1 – Détermination de l'indice ou de la permittivité d'un gaz)

La fréquence de résonance d'une cavité remplie d'air est 10 GHz et son coefficient de surtension en charge est 8 333. Lorsque cette cavité est remplie d'un gaz, sa fréquence de résonance est 9 GHz et la largeur de bande à – 3 dB de sa courbe de résonance est 4 MHz. Déterminer l'indice de réfraction $\underline{n} = n' - j\,n''$ de ce gaz ainsi que sa permittivité $\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\,\varepsilon''$.

EXERCICE 15.8

(Paragraphe 15.8.2 – Résonateurs en ondes millimétriques)

Soit un résonateur constitué par deux réflecteurs métalliques plans, distants de d, à diélectrique air. Les pertes par diffraction sont supposées négligeables. Les pertes par réflexion sont caractérisées par un coefficient α_R représentant la fraction de puissance qui se dissipe par effet Joule dans les réflecteurs $\alpha_R = \left(\dfrac{8\,\varepsilon_0\,\omega}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$;

σ, conductivité des réflecteurs.

1) Calculer le coefficient de qualité Q_j lié aux pertes par effet Joule dans les réflecteurs en fonction de (d, α_R et λ_0).

2) Démontrer l'expression de Q_j en $f(d, \lambda_0)$ dans le cas où la conductivité des réflecteurs est $\sigma = 5{,}33 \cdot 10^7$ S/m. Application numérique au cas où : $d = 0{,}20$ m et $\lambda = 1$ mm.

3) Le facteur de pertes de l'air qui se trouve entre les deux réflecteurs est $\operatorname{tg}\delta = 2 \cdot 10^{-6}$. Calculer le facteur de qualité Q_d lié aux pertes dans le diélectrique. En déduire le facteur de qualité propre à la cavité.

Solutions des exercices

EXERCICES DU CHAPITRE 2

Propagation sur une ligne en haute fréquence

EXERCICE 2.1

D'après les relations (5) et (11a), nous avons :

$$-\gamma \underline{V}_i e^{-\gamma x} + \gamma \underline{V}_r e^{\gamma x} = -(R_1 + j L_1 \omega)\underline{I}$$

Compte tenu de (9) et (11b), nous pouvons écrire :

$$-\underline{V}_i e^{-\gamma x} + \underline{V}_r e^{\gamma x} = -\sqrt{\frac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}} \left(\underline{I}_i e^{-\gamma x} + \underline{I}_r e^{\gamma x}\right)$$

En identifiant les termes en $e^{-\gamma x}$ et en $e^{\gamma x}$, il vient :

$$\frac{\underline{V}_i}{\underline{I}_i} = \sqrt{\frac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}}$$

$$\frac{\underline{V}_r}{\underline{I}_r} = -\sqrt{\frac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}}$$

EXERCICE 2.2

1) $\rho_1 = \sqrt{R_1^2 + L_1^2 \omega^2} = 20{,}72 \cdot 10^{-3}$

$$\varphi_1 = \text{arctg}\frac{L_1 \omega}{R_1} = 70{,}25°$$

$$\rho_2 = \sqrt{G_1^2 + C_1^2 \omega^2} = 36{,}6 \cdot 10^{-9}$$

$$\varphi_2 = \text{arctg}\frac{C_1 \omega}{G_1} = 84°$$

2) $Z_c = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, e^{j\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = 752\, e^{-j\,6{,}875°}$

$Z_c = 746{,}6 - j\,90.$

$$\gamma = \sqrt{\rho_1 \rho_2}\, e^{j\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}$$

$$= 27{,}54 \cdot 10^{-6}\, e^{j\,77{,}125°}$$

$\alpha = 6{,}137 \cdot 10^{-6}$ Np/m

$\beta = 26{,}848 \cdot 10^{-6}$ rad/m.

EXERCICE 2.3

1) $\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1}$ avec $\beta_1 = 26{,}848 \cdot 10^{-6}$

(résultat de l'exercice 2)

$$\lambda_1 = 234 \cdot 10^3 \text{ m} = 234 \text{ km}$$

$$v_1 = \frac{\omega}{\beta_1} = \frac{2\pi \cdot 10^3}{26{,}848 \cdot 10^{-6}} = 234\,000 \text{ km/s}$$

2) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 235\,833$ km/s

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_1} = 26{,}64 \cdot 10^{-6} \text{ rad/m}$$

EXERCICE 2.4

1) $\underline{I}_0 = \frac{E}{Z_0 + Z_G} = \frac{100}{175 - j\,120}$

$175 - j\,120 = 212{,}20\, e^{-j\,34{,}44°}$

D'où : $\underline{I}_0 = 0{,}471\, e^{j\,34{,}44°}$ (A)

$\underline{V}_0 = Z_0 \underline{I}_0$ avec $Z_0 = 173{,}28\, e^{-j\,43{,}83°}$

D'où : $\underline{V}_0 = 81{,}61\, e^{-j\,9{,}39°}$ (V)

2) D'après les relations (27) et (28)

$$\underline{V}_R = \underline{V}_0 \cos 2\pi \frac{\ell}{\lambda} - j Z_c \underline{I}_0 \sin 2\pi \frac{\ell}{\lambda}$$

$$\underline{I}_R = \underline{I}_0 \cos 2\pi \frac{\ell}{\lambda} - j \left(\frac{\underline{V}_0}{Z_c}\right) \sin 2\pi \frac{\ell}{\lambda}$$

$2\pi \frac{\ell}{\lambda} = 240°$ modulo 2π ($\ell = 10$ m ; $\lambda = 1{,}5$ m)

$$\underline{V}_R = -40{,}805\, e^{-j\,9{,}39°} + j\,20{,}395\, e^{j\,34{,}44°}$$
$$= -51{,}7925 + j\,23{,}4775$$

$$\underline{I}_R = -0{,}2355\, e^{j\,34{,}44°} + j\,1{,}4135\, e^{-j\,9{,}39°}$$
$$= 0{,}037 + j\,1{,}262$$

D'où : $\underline{V}_R = 56{,}865\, e^{-j\,24{,}38°}$ (V)

et : $\underline{I}_R = 1{,}263\, e^{+j\,88{,}32°}$ (A)

3) $Z_R = 45{,}02\, e^{-j\,112{,}70°}$ (Ω)

On peut retrouve ce résultat à partir de la formule (29) qui donne Z_R pour $x = \ell$.

EXERCICE 2.5

1) Puisque $Z_R = Z_c$, nous avons à l'entrée de la ligne :

$$Z_0 = Z_c = 800 - j\,200 = 824{,}62\, e^{-j\,14°}$$

Le courant à l'entrée de la ligne est donné par :

$$\underline{I}_0 = \frac{E}{Z_0 + Z_G} = \frac{100}{875 - j\,200} = 0{,}111\, e^{j\,12{,}875°}$$

$$\underline{V}_0 = Z_0 \underline{I}_0 = 91{,}88\, e^{-j\,1{,}125°}$$

2) $\underline{I}_R = \underline{I}_0\, e^{-\gamma\ell}$ et $\underline{V}_R = \underline{V}_0\, e^{-\gamma\ell}$

$e^{-\gamma\ell} = e^{-\alpha\ell}\, e^{-j\,\beta\ell}$

$\alpha\ell = 0{,}775$ Np $\rightarrow e^{-\alpha\ell} = 0{,}46$

$\beta\ell = 255$ rad $(2\pi) = 0{,}5845$ rad $= 210{,}424°$

Donc : $e^{-\gamma\ell} = 0{,}46\, e^{-j\,210{,}424°}$

D'où : $\underline{I}_R = 0{,}051\, e^{-j\,197{,}549°}$ (A)

et : $\underline{V}_R = 42{,}265\, e^{-j\,211{,}549°}$ (V)

3) $P_{act} = \frac{1}{2} \mathcal{R}\left[\underline{V}_R \underline{I}_R^*\right] = \frac{1}{2} \mathcal{R}\left[Z_R I_R^2\right]$

$$P_{act} = \frac{1}{2} R_R I_R^2 = 1{,}04 \text{ Watts}$$

EXERCICE 2.6

1) Nous avons démontré (paragraphe 6) que :

$$(Z_0)_{cc} = Z_c \text{ th } \gamma\ell \text{ et } (Z_0)_{c0} = \frac{Z_c}{\text{th } \gamma\ell}$$

Donc : $Z_c^2 = (Z_0)_{cc}\,(Z_0)_{c0}$

et : $(\text{th } \gamma\ell)^2 = \frac{(Z_0)_{cc}}{(Z_0)_{c0}}$ d'où $\gamma\ell$

Avec les valeurs mesurées pour $(Z_0)_{cc}$ et $(Z_0)_{c0}$, on trouve :

$$Z_c = 753{,}06\, e^{-j\,7°} = 747{,}45 - j\,91{,}77\ (\Omega)$$

$$\text{th } \gamma\ell = 0{,}704\, e^{-j\,28°} = 0{,}62 - j\,0{,}33$$

Or : $e^{-2\gamma\ell} = \frac{1 - \text{th } \gamma\ell}{1 + \text{th } \gamma\ell} = \frac{0{,}50\, e^{j\,40{,}97°}}{1{,}65\, e^{-j\,11{,}51°}}$

$$= 0{,}30\, e^{j\,52{,}48°}$$

Donc : $e^{-2\alpha\ell} = 0{,}30$ et $e^{-j\,2\beta\ell} = e^{j\,52{,}48°}$

D'où : $e^{\alpha\ell} = 1{,}8125 \rightarrow \alpha = 0{,}6 \cdot 10^{-5}$ Np/m.

et : $2\beta\ell = -52{,}48° + 360°$ puisque ℓ doit être positif.

$$\beta\ell = 153{,}76° = 2{,}6836 \text{ rad}$$
$$\rightarrow \beta = 2{,}68 \cdot 10^{-5} \text{ rad/m}$$

2) À partir des relations de définition de γ et Z_c :

$$R_1 + j L_1 \omega = \gamma Z_c \text{ et } G_1 + j C_1 \omega = \frac{\gamma}{Z_c}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 2{,}746 \cdot 10^{-5}\, e^{j\,77{,}38°}$$

$$Z_c = 753{,}06\, e^{-j\,7°}$$

$$R_1 + j L_1 \omega = 2\,068 \cdot 10^{-5}\, e^{j\,70{,}38°}$$
$$= 694{,}39 \cdot 10^{-5} + j\,1\,947{,}93 \cdot 10^{-5}$$
$$\rightarrow R_1 = 6{,}94 \cdot 10^{-3}\ \Omega/\text{m}$$
et $L_1 = 3{,}10 \cdot 10^{-6}$ H/m

$$G_1 + j C_1 \omega = 0{,}00365 \cdot 10^{-5}\, e^{j\,84{,}38°}$$
$$= 3{,}57 \cdot 10^{-9} + j\,0{,}00363 \cdot 10^{-5}$$
$$\rightarrow G_1 = 3{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ S/m}$$
et $C_1 = 5{,}78 \cdot 10^{-12}$ F/m

EXERCICE 2.7

1) $Z_c = \sqrt{75 \times 300} = 75 \times 2 = 150\ \Omega$

2) $Z_{c_1} = \sqrt{150 \times 300} = 150\sqrt{2} = 212\ \Omega$

$Z_{c_2} = \sqrt{75 \times 150} = 75\sqrt{2} = 106\ \Omega$

EXERCICE 2.8

1) Différentions la relation $k^2 = \beta^2 + k_c^2$:

$$k\,dk = \beta\,d\beta$$

Or : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v}$ et $dk = \dfrac{d\omega}{v}$

v est la vitesse de propagation en espace libre dans le diélectrique dont est constituée la ligne ($v = c$ uniquement si le diélectrique est de l'air).

Donc : $\dfrac{\omega\,d\omega}{v^2} = \beta\,d\beta$ ou $\dfrac{\omega}{\beta} \cdot \dfrac{d\omega}{d\beta} = v^2$

D'où : $v_p \cdot v_g = v^2$

2) $v_p = \dfrac{\omega}{\beta} = f\lambda_d = v\dfrac{\lambda_d}{\lambda} \rightarrow v_g = v\dfrac{\lambda}{\lambda_d}$

EXERCICES DU CHAPITRE 3

Étude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

EXERCICE 3.1

1) $\underline{V}(x = \ell) = \underline{V}_e = \underline{V}_R \cos\beta\ell + j\,Z_c\,\underline{I}_R \sin\beta\ell$

$= \underline{I}_R (Z_r \cos\beta\ell + j\,Z_c \sin\beta\ell)$

$\beta\ell = 28{,}56$ rad $= 4{,}5455 \cdot 2\pi$

$= 0{,}5455 \cdot 360° = 196{,}37°$

$\underline{V}_e = \underline{I}_R \cdot 1\,000\,[-(2 + j)\,0{,}9595$

$- j\,0{,}5 \cdot 0{,}2818]$

$= 34{,}1\,e^{-j\,45{,}166°} \cdot 2{,}212\,e^{j\,29{,}822°}\,e^{j\,180°}$

$\underline{V}_e = 75{,}43\,e^{j\,164{,}66°}$ (V)

$\underline{I}_e = \underline{I}_R \cos\beta\ell + j\dfrac{\underline{V}_R}{Z_c}\sin\beta\ell$

$= \underline{I}_R\left(\cos\beta\ell + j\dfrac{Z_R}{Z_c}\sin\beta\ell\right)$

$= \underline{I}_R\,[-0{,}9595 - j\,(4 + j\,2)\,0{,}2818]$

$= 0{,}0341\,e^{-j\,45{,}17°} \cdot 1{,}1947\,e^{j\,70{,}65°}\,e^{j\,180°}$

$\underline{I}_e = 0{,}0407\,e^{j\,205{,}48°}$ (A)

2) $Z_e = \dfrac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e} = 1\,851\,e^{-j\,40{,}82°}$ (Ω)

On retrouve ce résultat par la formule :

$$Z_e = Z_c\dfrac{Z_R + j\,Z_c\,\mathrm{tg}\,\beta\ell}{Z_c + j\,Z_R\,\mathrm{tg}\,\beta\ell}$$

3) $P_{act} = \dfrac{1}{2}\mathcal{R}\{\underline{V}_e\,\underline{I}_e^*\}$

$= \dfrac{1}{2}\,75{,}43 \cdot 0{,}041 \cos 40{,}83°$

$= 1{,}16$ Watts

EXERCICE 3.2

1) $\underline{\Gamma}_R = \dfrac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} = \dfrac{50 + j\,100}{200 + j\,100} = \dfrac{0{,}5 + j}{2 + j}$

$\underline{\Gamma}_R = 0{,}5\, e^{j\,36{,}87°} = 0{,}4 + j\,0{,}3$

2) Sur la charge ($x = 0$) :

$$\underline{\Gamma}_R = \frac{\underline{V}_r}{\underline{V}_i} \text{ et } \underline{V}_R = \underline{V}_i + \underline{V}_r$$

Donc : $\underline{V}_R = \underline{V}_i (1 + \underline{\Gamma}_R)$ et $V_R = V_i \,|\, 1 + \underline{\Gamma}_R \,|$

$$V_i = \frac{V_R}{|1 + \underline{\Gamma}_R|} = \frac{143{,}2}{|1{,}4 + j\,0{,}3|} = 100 \text{ V}$$

$$V_r = \Gamma_R V_i = 50 \text{ V}$$

3) $\underline{V}_i = 100\, e^{j\,0°}$

$\rightarrow \underline{V}_r = \underline{\Gamma}_R \underline{V}_i = 50\, e^{j\,36{,}87°}$ (V)

$\dfrac{\underline{V}_i}{\underline{I}_i} = Z_c \rightarrow \underline{I}_i = 1{,}33\, e^{j\,0°}$ (A)

$\dfrac{\underline{V}_r}{\underline{I}_r} = -Z_c \rightarrow \underline{I}_r = -0{,}667\, e^{j\,36{,}87°}$ (A)

$= 0{,}667\, e^{j\,216{,}87°}$

4) $\underline{V}_R = \underline{V}_i + \underline{V}_r = \underline{V}_i (1 + \underline{\Gamma}_R)$

$\underline{V}_R = 100\,(1{,}4 + j\,0{,}3) = 143{,}2\, e^{j\,12{,}1°}$ (V)

$\underline{I}_R = \underline{I}_i + \underline{I}_r = \underline{I}_i (1 - \underline{\Gamma}_R)$

$\underline{I}_R = 1{,}33\,(0{,}6 - j\,0{,}3) = 0{,}895\, e^{-j\,26{,}56°}$ (A)

$$P_{act} = \frac{1}{2} \mathcal{R}\,[\underline{V}_R \underline{I}_R^*] = \frac{1}{2} I_R^2 \mathcal{R}\,[Z_R]$$

$$= \frac{1}{2}\, 0{,}895^2 \times 125 = 50 \text{ W}$$

EXERCICE 3.3

1) $\underline{\Gamma}_R = \dfrac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} = \dfrac{j\,X_R - Z_c}{j\,X_R + Z_c} = -\dfrac{Z_c - j\,X_R}{Z_c + j\,X_R}$

$$\Gamma_R = 1$$

et $\arg \underline{\Gamma}_R = \arg(-1) + \arg(Z_c - j\,X_R) - \arg(Z_c + j\,X_R)$

Or : $\arg(Z_c - j\,X_R) = -\arg(Z_c + j\,X_R)$

$$= -\operatorname{arctg} \frac{X_R}{Z_c}$$

Donc : $\arg \underline{\Gamma}_R = \pi - 2 \operatorname{arctg} \dfrac{X_R}{Z_c}$

2) a) $\operatorname{arctg} \dfrac{X_R}{Z_c} = \operatorname{arctg} \dfrac{100}{75} = 53{,}13°$

$\rightarrow \arg \underline{\Gamma}_R = 180° - 2 \cdot 53{,}13° = 73{,}74°$

b) $\operatorname{arctg} \dfrac{X_R}{Z_c} = \operatorname{arctg} - \dfrac{50}{75} = -33{,}69°$

$\rightarrow \arg \underline{\Gamma}_R = 180° + 2 \cdot 33{,}69° = 247{,}38°$

EXERCICE 3.4

1) 1 Np = 8,68 dB ;
donc : $\alpha = 0{,}3$ dB/m $= 0{,}0345$ Np/m

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 20{,}1062 \text{ rad/m}$$

2) a) $\Gamma_R = \dfrac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} = \dfrac{250}{350} = 0{,}714$

$\underline{\Gamma}(\ell) = \Gamma_R\, e^{-2\gamma\ell} = \Gamma_R\, e^{-2\alpha\ell}\, e^{-2j\beta\ell}$

$e^{-2\alpha\ell} = e^{-0{,}0690} = 0{,}933$

$\beta\ell = \dfrac{2\pi\ell}{\lambda} = 2\pi \cdot 3{,}2 = 0{,}4\pi$ (modulo 2π)

$e^{-2j\beta\ell} = e^{-j\,0{,}8\pi}$

Donc : $\underline{\Gamma}(\ell) = 0{,}666\, e^{-j\,144°}$

b) $Z(\ell) = Z_c \dfrac{1 + \underline{\Gamma}(\ell)}{1 - \underline{\Gamma}(\ell)} = 50 \dfrac{0{,}461 - j\,0{,}3915}{1{,}539 + j\,0{,}3915}$

$$Z(\ell) = 50 \frac{0{,}6048\, e^{-j\,40{,}34°}}{1{,}5880\, e^{j\,14{,}27°}}$$

$$= 19{,}04\, e^{-j\,54{,}61°} = 11{,}03 - j\,15{,}52$$

EXERCICE 3.5

1) $\underline{\Gamma}_R = \dfrac{65 + j\,75}{165 + j\,75} = \dfrac{99{,}25\, e^{j\,49{,}08°}}{181{,}25\, e^{j\,24{,}44°}}$

$$\underline{\Gamma}_R = 0{,}548\, e^{j\,24{,}64°}$$

$$\text{R.O.S.} = \frac{1+\Gamma_R}{1-\Gamma_R} = 3{,}425$$

2) $Z_M = \rho\, Z_c = 171{,}25\ \Omega$

$$Z_m = \frac{Z_c}{\rho} = 14{,}6\ \Omega$$

La position x_M d'un maximum de tension se détermine d'après :

$$\varphi - 2k\pi = 2\beta\, x_M \rightarrow x_M = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\varphi}{2} - k\pi\right)$$

$$\varphi = 24{,}64° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0{,}43 \text{ radians}$$

$$\rightarrow \frac{\varphi}{2} = 0{,}215$$

La position du premier maximum de tension correspond à $k = 0$

$$x_M = \frac{0{,}215}{3{,}307} = 0{,}065 \text{ m}$$

Le premier minimum de tension est à $\lambda/4$ plus loin.

Comme $\lambda = 2\pi/\beta = 1{,}9$ m, nous avons :

$$x_m = 0{,}065 + 0{,}475 = 0{,}54 \text{ m}.$$

EXERCICE 3.6

Puisque la ligne n'a pas de perte, nous avons :

$$P_{act} = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}\,[\underline{V}(x)\,\underline{I}(x)^*] \quad \forall\, x$$

Plaçons-nous, par exemple, en un maximum de tension : la tension $\underline{V}_M$ et le courant $\underline{I}_m$ *sont en phase*, puisque Z_M est réelle, et nous avons donc :

$$P_{act} = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}\,[\underline{V}_M\,\underline{I}_m^*] = \frac{1}{2}\,V_M\,I_m$$

Comme $I_m = V_M/Z_m$ et $Z_M = \rho\, Z_c$,

nous avons :

$$P_{act} = \frac{1}{2}\cdot\frac{V_M^2}{\rho\, Z_c} = \frac{\left(V_M^{ef}\right)^2}{\rho\, Z_c}$$

Nous obtenons donc les *valeurs efficaces* cherchées :

$$V_M = \sqrt{P\,\rho\, Z_c} = 100\,\sqrt{2} = 141{,}4 \text{ V}$$

$$V_m = \frac{V_M}{\rho} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70{,}7 \text{ V}$$

$$I_M = \frac{V_M}{Z_c} = \sqrt{2} = 1{,}414 \text{ A}$$

$$I_m = \frac{I_M}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \text{ A}$$

EXERCICE 3.7

1) $\Gamma_R = \dfrac{\rho - 1}{\rho + 1} = \dfrac{1}{3} = 0{,}333$

$$\varphi - 2\beta\, x_m = (2k+1)\,\pi \rightarrow \varphi = 4\pi\,\frac{x_m}{\lambda} + \pi\,(2\pi)$$

Donc : $\varphi = 4\pi\,\dfrac{0{,}75}{10} + \pi = 1{,}3\pi$

$$\underline{\Gamma}_R = 0{,}333\, e^{j\,234°}$$

$$Z_R = Z_c\,\frac{1+\underline{\Gamma}_R}{1-\underline{\Gamma}_R} = 100\,\frac{0{,}804 - j\,0{,}270}{1{,}196 + j\,0{,}270}$$

$$Z_R = 100\,\frac{0{,}848\, e^{-j\,18{,}56°}}{1{,}226\, e^{j\,12{,}72°}}$$

$$Z_R = 69{,}17\, e^{-j\,31{,}28°} = 59{,}115 - j\,35{,}915\ \Omega$$

2) $P_{act} = \dfrac{1}{2}\,\mathcal{R}\,[\underline{V}_R\,\underline{I}_R^*] = \dfrac{1}{2}\,R_R\,I_R^2$

Donc : $I_R = \sqrt{\dfrac{2P}{R_R}} = 1{,}84$ A

et : $V_R = |Z_R|\,I_R = 127{,}27$ V

EXERCICES DU CHAPITRE 4

Diagramme de Smith

EXERCICE 4.1 (fig. E.1)

1) M est le point représentatif de $\Gamma_R = 0{,}54$ et $\arg \underline{\Gamma}_R = 128°$.

Le R.O.S. se lit à l'intersection du cercle de rayon $\Gamma_R = 0{,}54$ avec l'axe des réels à droite $\rightarrow \rho = 3{,}35$.

Impédance réduite correspondant au point M :

$$z_R = 0{,}36 + j\,0{,}44$$

D'où : $Z_R = z_R \cdot Z_c = 18 + j\,22 \quad (\Omega)$

Admittance réduite correspondant au point M' :

$$y_R = 1{,}13 - j\,1{,}35$$

D'où : $Y_R = y_R \cdot Y_c = (2{,}26 - j\,2{,}7)\ 10^{-2}$ S.

2) De la même manière, on trouve : $\rho = 2{,}35$

$$z_R = 1{,}07 - j\,0{,}9 \rightarrow Z_R = 53{,}5 - j\,45\ \Omega$$

$$y_R = 0{,}55 + j\,0{,}45 \rightarrow Y_R = (1{,}1 + j\,0{,}90)\ 10^{-2}\ \text{S}$$

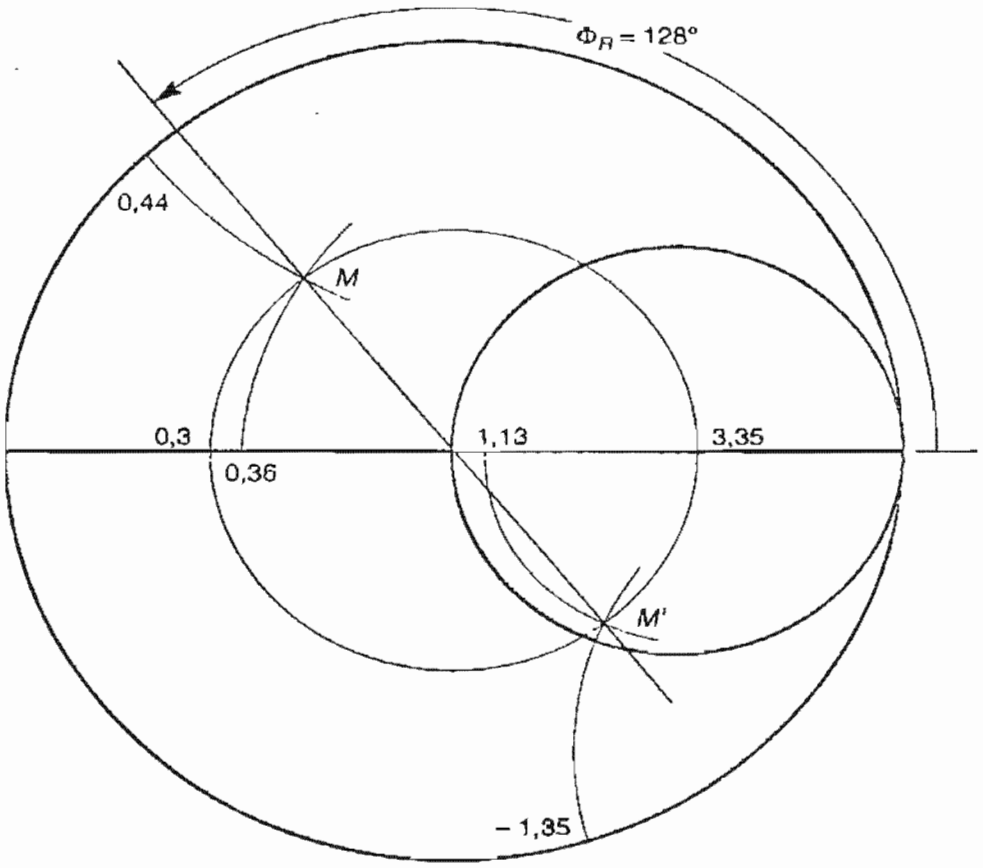


Figure E.1.

EXERCICE 4.2 (fig. E.2)

1) $z_R = \dfrac{Z_R}{Z_c} = 0{,}8 + j\,1{,}3$

(Point M du diagramme)

$y_R = 0{,}35 - j\,0{,}55$

(Point M', symétrique de M)

$Y_R = y_R\, Y_c = (0{,}7 - j\,1{,}1)\ 10^{-2}$ S

Au point B, on lit le R.O.S. : $\rho = 3{,}9$.

La position du point M en coordonnées polaires nous donne :

$$\underline{\Gamma}_R = 0{,}59\ e^{j\,63°}$$

2) De la même manière, nous obtenons :

$z_R = 0{,}6 - j\,1{,}4$

$y_R = 0{,}26 + j\,0{,}60 \rightarrow Y_R = (0{,}52 + j\,1{,}20)\ 10^{-2}$ S

$\rho = 5{,}3$ et $\underline{\Gamma}_R = 0{,}68\ e^{-j\,65°}$

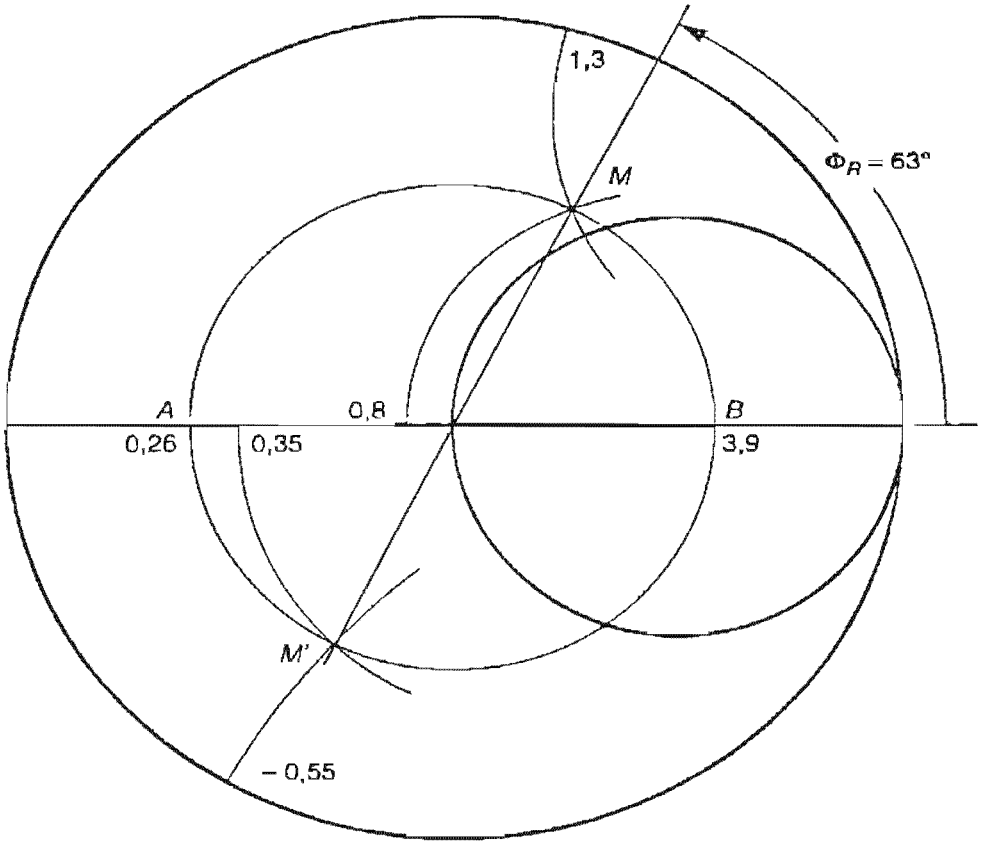


Figure E.2.

EXERCICE 4.3 (fig. E.3)

1) $z_R = \dfrac{Z_R}{Z_c} = 0{,}6 - j\,1{,}1$

(Point M du diagramme)

Au point B, on lit le R.O.S. : $\rho = 4{,}1$.

La position de M en coordonnées polaires nous donne : $\underline{\Gamma}_R = 0{,}61\ e^{-j\,76°}$

2) À 11 cm de la charge : $x/\lambda = 1{,}375$ soit 0,375.

Nous devons donc tourner de 0,375 vers le générateur en partant de la graduation 0,355 qui repère la position de la charge. Le point d'arrivée correspond donc à la graduation :

$$0{,}355 + 0{,}375 = 0{,}730 \text{ soit } 0{,}230$$

En ce point :

$$z = 3{,}3 + j\,1{,}6 \rightarrow Z = 165 + j\,80.$$

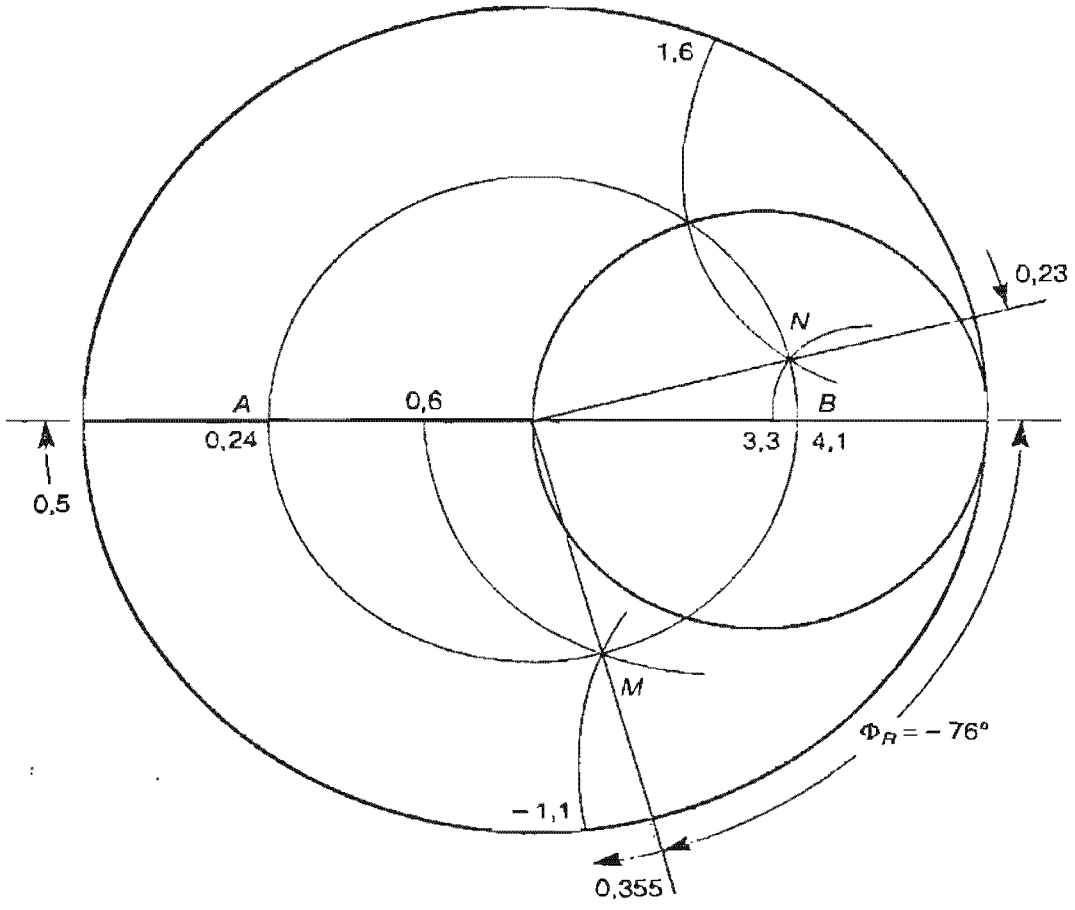


Figure E.3.

3) Un minimum de tension correspond au point A dont la distance à la charge est

$$\frac{x_m}{\lambda} = 0{,}500 - 0{,}355 = 0{,}145$$

D'où : $x_m = 0{,}145\lambda + \frac{k\lambda}{2} = 1{,}16 \text{ cm} + 4k \text{ cm}$

(k, nombre entier positif ou nul pour le premier minimum).

En ce point : $z_m = 0{,}24 \rightarrow Z_m = 12\ \Omega$.

Un maximum de tension correspond au point B dont la distance à la charge est :

$$\frac{x_M}{\lambda} = \frac{x_m}{\lambda} + 0{,}250 = 0{,}395$$

D'où : $x_M = 0{,}395\lambda + \frac{k\lambda}{2} = 3{,}16 \text{ cm} + 4k \text{ cm}$

En ce point : $z_M = 4{,}1 \rightarrow Z_M = 205\ \Omega$.

EXERCICE 4.4 (fig. E.4)

1) La position du point M, représentatif de $z_R = 2{,}1 + j\ 1{,}35$, est déterminée par la graduation 0,212.

Pour trouver l'impédance d'entrée z_e, il faut tourner de $\ell/\lambda = 1{,}184$ soit 0,184 vers le générateur ; z_e correspond donc à la graduation : $0{,}212 + 0{,}184 = 0{,}396$.

Nous lisons :

$$z_e = 0{,}48 - j\ 0{,}64 \text{ (Point } N\text{)}$$

D'où : $Z_e = z_e Z_c = 36 - j\ 48\ \Omega$.

2) Le R.O.S. se lit en B : $\rho = 3{,}1$.

Γ_R est donné par les coordonnées polaires du point M :

$$\Gamma_R = 0{,}51\ e^{j\,27°}$$

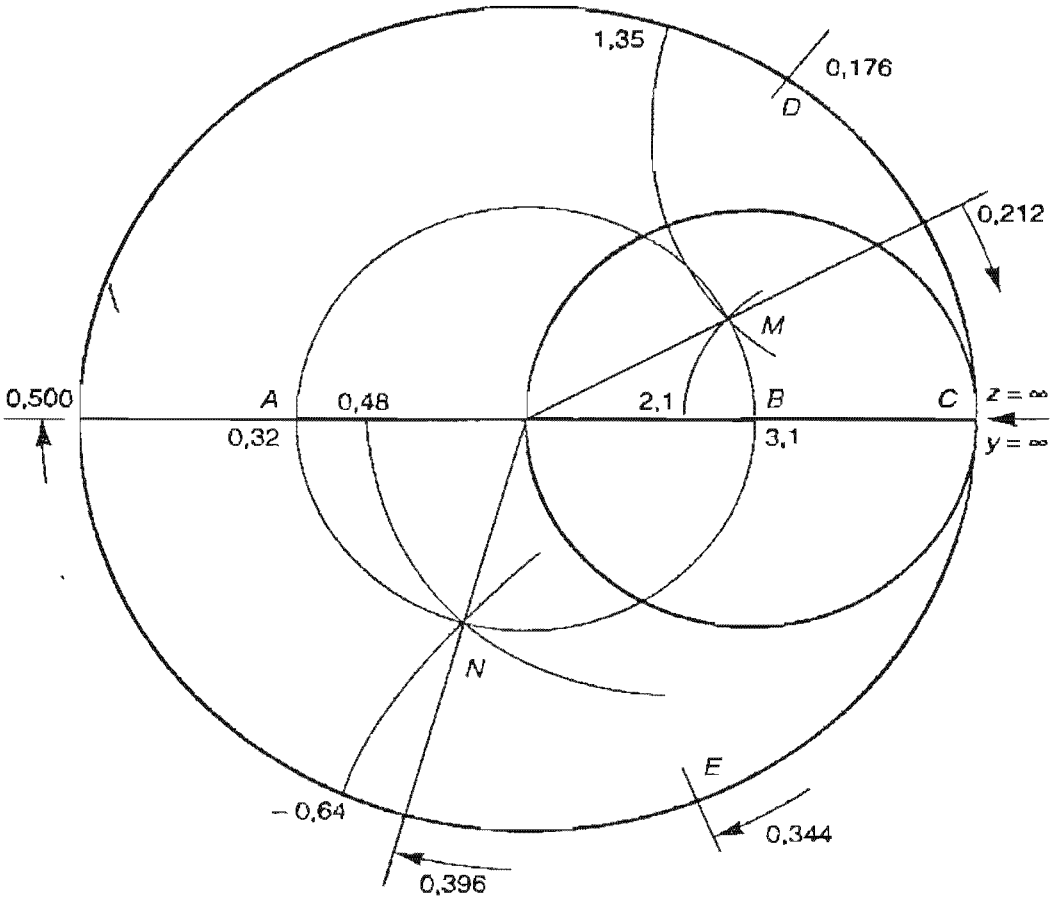


Figure E.4.

3) Le premier minimum d'impédance se trouve en A. Sa distance à la charge est :

$$\frac{x_m}{\lambda} = 0{,}500 - 0{,}212 = 0{,}288$$

D'où : $x_m = 0{,}288 \cdot 1{,}9 = 0{,}547$ m.

La valeur de Z_m est : $Z_m = 0{,}325 \cdot 75 = 24\ \Omega$.

EXERCICE 4.5 (fig. E.4)

1) Le point représentatif du court-circuit est C pour lequel $y_R = \infty$. On tourne vers le générateur jusqu'au point D représentatif de $y = 2$ j. La longueur ℓ de la ligne est elle que :

$$\frac{\ell}{\lambda} = 0{,}250 + 0{,}176 = 0{,}426 \rightarrow \ell = 2{,}13 \text{ cm}$$

2) Le point représentatif du circuit ouvert est C pour lequel $z_R = \infty$. On tourne vers le générateur jusqu'au point E représentatif de $z = -1{,}5$ j.

$$\frac{\ell}{\lambda} = 0{,}344 - 0{,}250 = 0{,}094 \rightarrow \ell = 0{,}94 \text{ cm}$$

EXERCICE 4.6 (fig. E.5)

Pour le premier tronçon de ligne :

$$z_1 = \frac{Z_1}{Z_{c_1}} = 1 - \text{j } 1{,}5 \text{ (Point } A_1 \leftrightarrow 0{,}324)$$

On tourne de $\ell_1/\lambda_1 = 0{,}333$ vers le générateur jusqu'au point B_1 ($\leftrightarrow 0{,}657$ soit $0{,}157$) représentatif de l'impédance d'entrée. Le point C_1 représente l'admittance d'entrée :

$$y_{e_1} = 0{,}34 - j\,0{,}60.$$

Pour le deuxième tronçon de ligne :

$$z_2 = \frac{Z_2}{Z_{c_2}} = 1{,}33 + j\,1 \text{ (Point } A_2 \leftrightarrow 0{,}182)$$

On tourne de $\ell_2/\lambda_2 = 0{,}300$ vers le générateur jusqu'au point B_2 ($\leftrightarrow$ 0,482) représentatif de l'impédance d'entrée.

Le point C_2 représente l'admittance d'entrée :

$$y_{e_2} = 2{,}3 + j\,0{,}52.$$

Pour trouver l'admittance résultant de la mise en parallèle de ces deux tronçons d'impédances caractéristiques différentes, nous devons obligatoirement passer en valeurs vraies ; nous avons :

$$Y_{e_1} = y_{e_1} \cdot Y_{c_1} = (6{,}8 - j\,12)\ 10^{-3}\ \text{S}.$$

$$Y_{e_2} = y_{e_2} \cdot Y_{c_2} = (30{,}7 + j\,6{,}9)\ 10^{-3}\ \text{S}.$$

D'où : $Y_e = Y_{e_1} + Y_{e_2} = (37{,}5 - j\,5{,}1)\ 10^{-3}$ S.

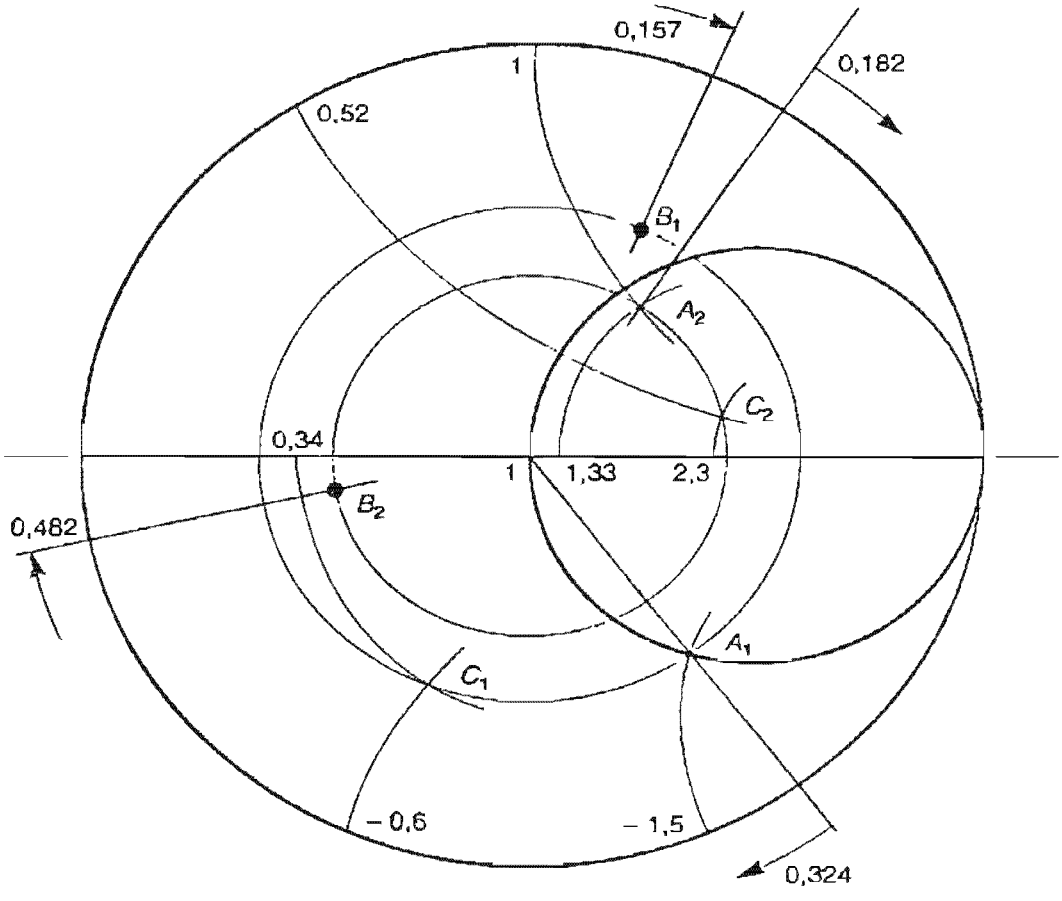


Figure E.5.

EXERCICE 4.7 (fig. E.6)

1) Nous partons du point A qui représente z_m et nous tournons vers la charge de x_m. $\lambda = 0{,}348$ sur le cercle à R.O.S. = 2,7. Nous obtenons $z_R = 0{,}88 + j\,0{,}95$ (Point $B \leftrightarrow 0{,}348$).

2) Nous partons du point B et nous tournons vers le générateur de $\ell/\lambda = 1{,}450$ soit 0,450 sur le cercle à R.O.S. = 2,7.

Nous obtenons le point C ($\leftrightarrow$ 0,102 soit 0,450 + 0,152 = 0,602) qui représente

$$z_e = 0{,}55 + j\,0{,}60.$$

EXERCICE 4.8 (fig. E.6)

1) Soit x_1 la position d'un minimum de tension, c'est-à-dire d'impédance, lorsque la ligne est terminée par Z_R.

Lorsque l'on remplace Z_R par un court-circuit, le minimum de tension (qui d'ailleurs devient nul) se trouve en x_2 (voir fig. 8a et 8b du chapitre 3 « Étude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne ») dont la distance au court-circuit est $n\lambda/2$.

La distance entre le minimum d'impédance et la charge est donc :

$$x_m = (x_1 - x_2) + \frac{n\lambda}{2} = 5{,}25 \text{ cm} + \frac{n\lambda}{2}$$

Pour trouver z_R, il faut donc partir de z_m (point A') et tourner vers la charge de $5{,}25/50 = 0{,}105$ sur le cercle à R.O.S. = 5. Nous obtenons le point B' pour lequel : $z_R = 0{,}32 - j\ 0{,}72$ d'où : $Z_R = 16 - j\ 36$.

2) Avec un circuit-ouvert, les minima sont décalés de $\lambda/4$ par rapport au cas d'un court-circuit. Comme $\lambda/4 = 12{,}5$ cm, le minimum de tension se serait déplacé de $5{,}25 + 12{,}5 = 17{,}75$ cm vers la charge ou de $12{,}5 - 5{,}25$ cm $= 7{,}25$ cm vers le générateur.

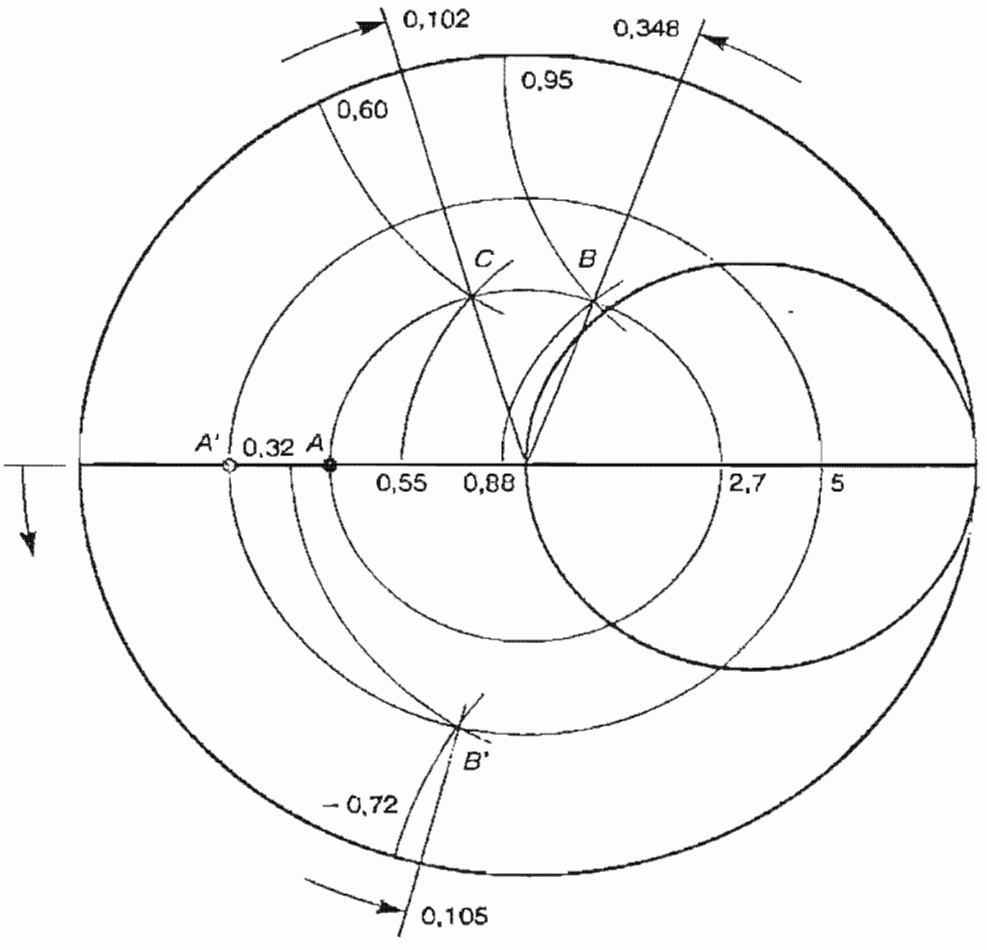


Figure E.6.

EXERCICES DU CHAPITRE 5

Les dispositifs d'adaptation

EXERCICE 5.1 (fig. E.7)

1) À $f = 500$ MHz, $\lambda = 60$ cm donc $\ell_1 = \lambda/4$.

Impédance de charge :

$$Z_R = R + jL\omega = 50 + j\,62{,}8\ \Omega.$$

Impédance réduite :

$$z_R = 0{,}5 + j\,0{,}628 \text{ (Point } A \leftrightarrow 0{,}102)$$

La longueur ℓ_1 doit être telle que l'impédance z_1 ($\ell_1 - \varepsilon$) soit réelle : en tournant vers le générateur, à partir du point A, le premier point dont l'impédance est réelle est le point B.

En B : $z_M = 2{,}95 \rightarrow Z_M = 295\ \Omega$.

La longueur ℓ_1 est donnée par :

$$\frac{\ell_1}{\lambda} = 0{,}250 - 0{,}102 = 0{,}148 \text{ d'où } \ell_1 = 8{,}88 \text{ cm}$$

L'impédance caractéristique de la ligne $\lambda/4$ doit être :

$$Z_c' = \sqrt{295 \times 100} = 171{,}75\ \Omega$$

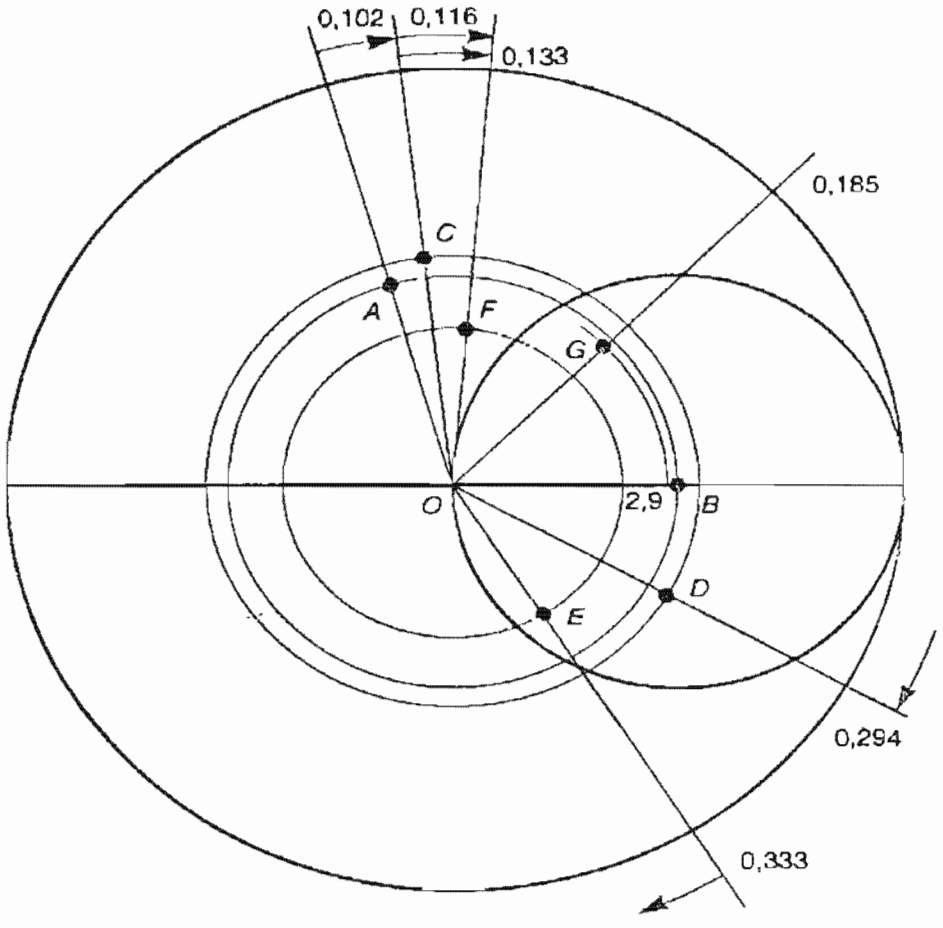


Figure E.7.

2) À $f = 600$ MHz, $\lambda' = 50$ cm.

$$Z_R = 50 + j\,75{,}40$$
$$\rightarrow z_R = 0{,}50 + j\,0{,}754 \text{ (Point } C \leftrightarrow 0{,}116).$$

À la distance $\ell_1 - \varepsilon$ ($\ell_1/\lambda' = 0{,}178$) vers le générateur :

$$z_1 = 1{,}9 - j\,1{,}5$$
(Point $D \leftrightarrow 0{,}116 + 0{,}178 = 0{,}294$).

À la distance $\ell_1 + \varepsilon$:

$$z_1' = z_1 \frac{Z_c}{Z_c'} = 1{,}106 - j\,0{,}873$$

(Point $E \leftrightarrow 0{,}333$).

À la distance $\ell_1 + \ell_2 - \varepsilon$ ($\ell_2/\lambda' = 0{,}300$) vers le générateur :

$$z_2' = 0{,}79 + j\,0{,}75$$
(Point $F \leftrightarrow 0{,}633$ soit $0{,}133$).

À la distance $\ell_1 + \ell_2 + \varepsilon$:

$$z_2 = z_2' \frac{Z_c'}{Z_c} = 1{,}357 + j\,1{,}288$$

(Point $G \leftrightarrow 0{,}185$).

Le cercle de centre O passant par G correspond à un R.O.S. de 2,9.

EXERCICE 5.2 (fig. E.8)

$$Z_c = \sqrt{50 \cdot 7{,}5} = 19{,}365\ \Omega$$

L'impédance d'entrée de la ligne doit être égale à Z_G^*, soit en impédance réduite :

$z_G^* = 0{,}387 - j\,0{,}568$ (Point $A \leftrightarrow 0{,}091$)

L'impédance de charge, en valeur réduite, est :

$$z_R = 2{,}582 - \frac{j}{C\omega} \cdot \frac{1}{Z_c}$$

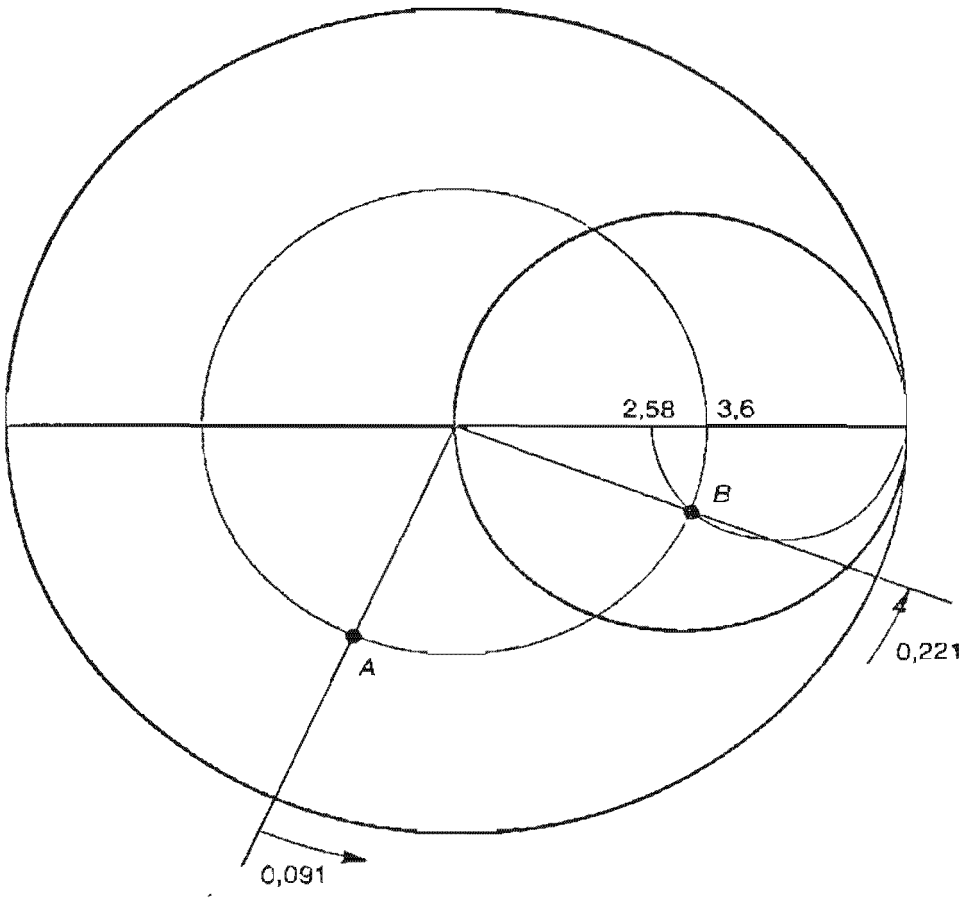


Figure E.8.

À partir du point A, il faut se déplacer vers la charge sur le cercle à R.O.S. = 3,6, jusqu'à la rencontre du demi-cercle à $r = 2{,}582$ et $x < 0$. L'intersection est le point B ($\leftrightarrow$ 0,221) pour lequel : $z_B = 2{,}852 - \mathrm{j}\ 1{,}5$

d'où : $\dfrac{\ell'}{\lambda} = 0{,}130$ et $\dfrac{1}{C\omega} \cdot \dfrac{1}{Z_c} = 1{,}5$

donc : $\ell' = 0{,}130\ \lambda$ et $C = 2{,}24 \cdot 10^{-12}$ F.

EXERCICE 5.3

En appliquant la procédure qui a été détaillée au paragraphe 5.6.1, on trouve que :

1re solution :

$d = 10{,}6$ cm et $s = 5{,}3$ cm,

2e solution :

$d' = 18{,}6$ cm et $s' = 19{,}7$ cm.

EXERCICE 5.4 (fig. E.9)

$$z_R = \frac{Z_R}{Z_c} = 0{,}3 - \mathrm{j}\ 0{,}85 \text{ (Point } A\text{)}$$

$y_R = 0{,}37 + \mathrm{j}\ 1{,}05$ (Point $B \leftrightarrow 0{,}134$).

Le stub doit être placé à un endroit de la ligne où la partie réelle de l'admittance est égale à 1. Il y a deux solutions.

1) En C : $y\,(d - \varepsilon) = 1 + \mathrm{j}\ 2$.

La distance de ce point à la charge est :

$$\frac{d}{\lambda} = 0{,}188 - 0{,}134 = 0{,}054 \rightarrow d = 1{,}62 \text{ cm}$$

L'admittance d'entrée du stub devra être : $y(s) = -\mathrm{j}\ 2$. Or, cette admittance réduite est normalisée par rapport à $Z_c = 1/Y_c = 50\ \Omega$.

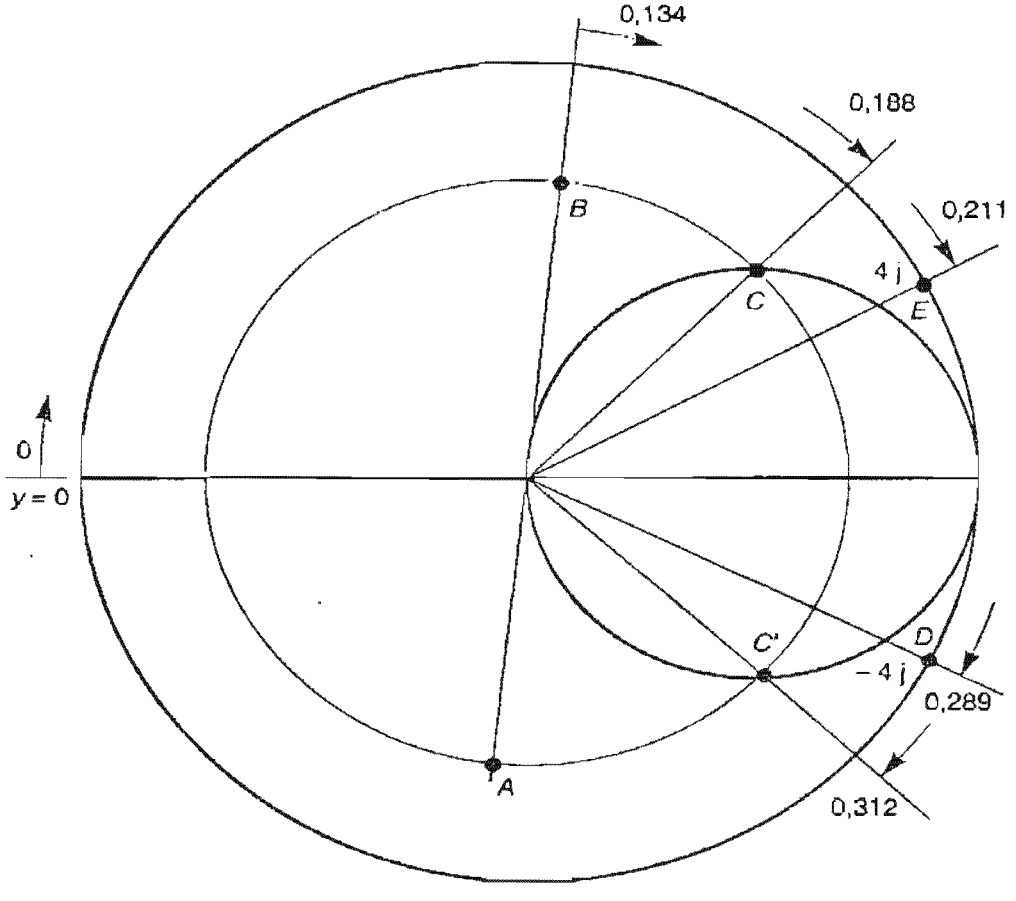


Figure E.9.

Donc $y(s) = Y(s)/Y_c$, où $Y(s)$ est l'admittance d'entrée du stub en valeur vraie.

Comme le stub a une impédance caractéristique $Z_c' = 1/Y_c' = 100\ \Omega$, la même admittance $Y(s)$ normalisée par rapport à Z_c' a pour valeur réduite :

$$y'(s) = \frac{Y(s)}{Y_c'} = y(s)\frac{Y_c}{Y_c'} = y(s)\frac{Z_c'}{Z_c} = -\,j\,4$$

Nous devons donc rechercher la longueur d'un stub en circuit ouvert ($y = 0$) dont l'admittance d'entré est $-\,j\,4$ (Point $D \leftrightarrow 0{,}289$).

$$\frac{s}{\lambda} = 0{,}289 \rightarrow s = 8{,}67\ \text{cm}$$

2) En C' : $y\,(d' - \varepsilon) = 1 - j\,2$.

$$\frac{d'}{\lambda} = 0{,}312 - 0{,}134 = 0{,}178 \rightarrow d' = 5{,}34\ \text{cm}$$

L'admittance d'entrée du stub devra être :

$$y(s') = j\,2$$

soit $y'(s') = j\,4$ lorsque l'on normalise par rapport à $100\ \Omega$.

La longueur d'un stub en circuit ouvert ($y = 0$) dont l'admittance d'entrée est j 4 (Point $E \leftrightarrow 0{,}211$) est :

$$\frac{s'}{\lambda} = 0{,}211 \rightarrow s' = 6{,}33\ \text{cm}$$

EXERCICE 5.5

En appliquant la procédure qui a été détaillée au paragraphe 5.6.2, on trouve :

1re solution : $s_1' = 5{,}6$ cm et $s_2' = 16{,}75$ cm,

2e solution : $s_1'' = 3{,}3$ cm et $s_2'' = 5{,}35$ cm.

EXERCICE 5.6 (fig. E.10)

Nous allons donner une solution entièrement analytique :

$$z_R = 1{,}5 - j\,1{,}2 \text{ et } y_R = 0{,}40 + j\,0{,}33$$

$$y(0) = y_R + y_{s_1} = 0{,}40 + j\,0{,}33 + j\,b_1$$

D'après la formule de transformation des admittances :

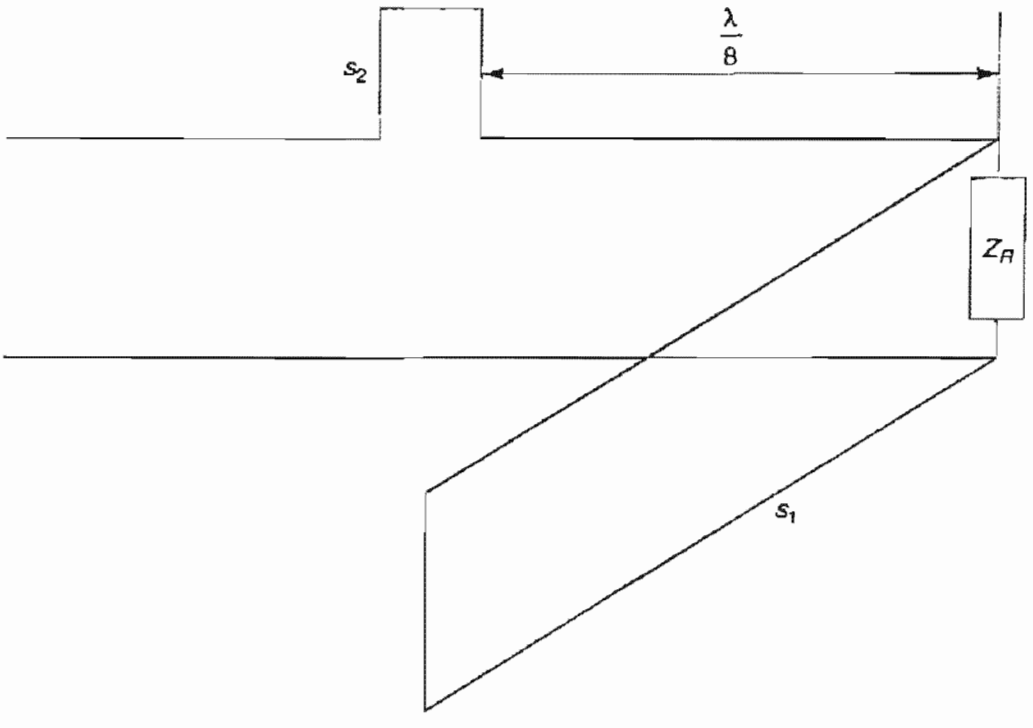


Figure E.10.

$$y\left(\frac{\lambda}{8}-\varepsilon\right)=\frac{y(0)+\mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta\lambda}{8}}{1+\mathrm{j}\,y(0)\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta\lambda}{8}}=\frac{y(0)+\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}\,y(0)}$$

et : $z\left(\frac{\lambda}{8}+\varepsilon\right)=z\left(\frac{\lambda}{8}-\varepsilon\right)+z\,(s_2)$

soit : $z\left(\frac{\lambda}{8}+\varepsilon\right)=\frac{1+\mathrm{j}\,0{,}40-0{,}33-b_1}{0{,}40+\mathrm{j}\,0{,}33+\mathrm{j}\,b_1+\mathrm{j}}+\mathrm{j}\,x_2$

Or : $z\left(\frac{\lambda}{8}+\varepsilon\right)=1+\mathrm{j}\,0$

donc : $\frac{0{,}67+\mathrm{j}\,0{,}40-b_1}{0{,}40+\mathrm{j}\,1{,}33+\mathrm{j}\,b_1}=1-\mathrm{j}\,x_2$

En égalant parties réelles et parties imaginaires, nous obtenons deux équations à deux inconnues (b_1, x_2) :

(1) $0{,}93=0{,}40\,x_2-b_1$
(2) $0{,}27=1{,}33\,x_2+b_1+b_1\,x_2$

d'où l'équation du second degré en x_2 :

(3) $x_2^2+2x_2-3=0$

qui a pour solutions :

$x_2'=1 \rightarrow b_1'=-0{,}53$
$x_2''=-3 \rightarrow b_1''=-2{,}13$

d'où l'on déduit :

$$z(s_2')=\mathrm{j}\,1 \text{ et } \frac{s_2'}{\lambda}=0{,}125$$

$$z(s_2'')=-\mathrm{j}\,3 \text{ et } \frac{s_2''}{\lambda}=0{,}302$$

(distances lues sur le diagramme de Smith entre le point $z=0$ et les points représentatifs de $\mathrm{j}\,1$ et $-\mathrm{j}\,3$)

$$y(s_1')=-\mathrm{j}\,0{,}53 \text{ et } \frac{s_1'}{\lambda}=0{,}174$$

$$y(s_1'')=-\mathrm{j}\,2{,}13 \text{ et } \frac{s_1''}{\lambda}=0{,}070$$

(distances lues sur le diagramme entre le point $y=\infty$ et les points représentatifs de $-\mathrm{j}\,0{,}53$ et $-\mathrm{j}\,2{,}13$.)

EXERCICE 5.7 (fig. E.11)

Normalisons les impédances par rapport à $Z_c=40\,\Omega$:
$z_R=0{,}1+\mathrm{j}\,0{,}05$ (Point $A \leftrightarrow 0{,}008$) et $z_G=1{,}25$

Nous allons écrire la condition d'adaptation à l'interface $(\ell,\ \ell+\varepsilon)$. Comme les admittances de part et d'autre de cette interface sont complexes, cette condition est :

$$y^*(\ell+\varepsilon)=y(\ell)$$

• Calculons $y\,(\ell)$ en partant de la charge z_R :

$$\ell=2 \text{ cm}, \lambda=25 \text{ cm}, \frac{\ell}{\lambda}=0{,}080$$

$z\,(\ell-\varepsilon)=0{,}14+\mathrm{j}\,0{,}61$ (Point $B \leftrightarrow 0{,}088$)
$y\,(\ell-\varepsilon)=0{,}36-\mathrm{j}\,1{,}55$ (Point C)
$y\,(\ell)=0{,}36-\mathrm{j}\,1{,}55+\mathrm{j}\,C_p\,\omega\,Z_c$ (1)

Le lieu de $y(\ell)$ est un arc du cercle C_1 à $g=0{,}36$ et $b>-1{,}55$.

• Calculons $y^*(\ell+\varepsilon)$ en partant du générateur :

$$z\,(\ell+\varepsilon)=1{,}25-\mathrm{j}\,\frac{1}{C_s\,\omega}\cdot\frac{1}{Z_c} \qquad (2)$$

Le lieu de $z\,(\ell+\varepsilon)$ est le demi-cercle à $r=1{,}25$ et $x<0$ (demi-cercle C_2) ; le lieu de $y\,(\ell+\varepsilon)$ est le demi-cercle symétrique par rapport au centre du diagramme (demi-cercle C_3) → le lieu de $y^*(\ell+\varepsilon)$ est le demi-cercle symétrique du précédent par rapport à l'axe horizontal (demi-cercle C_4).

• À l'intersection de C_1 et de C_4, nous lisons :

$y(\ell)=y^*(\ell+\varepsilon)=0{,}36-\mathrm{j}\,0{,}4$ (Point D) (3)

et l'on en déduit :

$y\,(\ell+\varepsilon)$ (Point E)
et $z\,(\ell+\varepsilon)=1{,}25-\mathrm{j}\,1{,}45$ (Point F) (4)

D'après les relations (1) et (3), on trouve C_p :

$\mathrm{j}\,C_p\,\omega\,Z_c=\mathrm{j}\,1{,}15$ d'où : $C_p=\mathbf{7{,}625\ pF}$

D'après les relations (2) et (4), on trouve C_s :

$-\mathrm{j}\,\frac{1}{Z_c\,C_s\,\omega}=-\mathrm{j}\,1{,}45$ d'où : $C_s=\mathbf{4{,}573\ pF}$

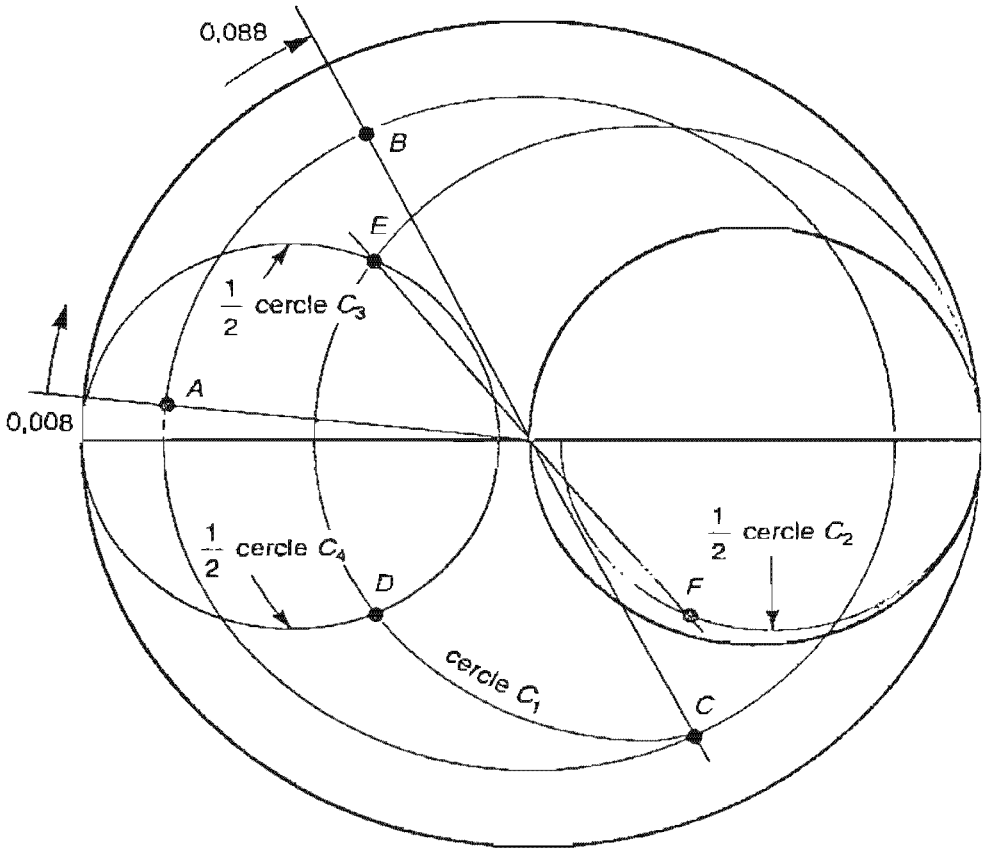


Figure E.11.

EXERCICES DU CHAPITRE 6

Lignes avec pertes

EXERCICE 6.1

Nous avons démontré que :

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2$$
$$2\alpha\beta = \omega (L_1 G_1 + R_1 C_1)$$

Il faut établir l'expression de $\alpha^2 + \beta^2$; nous avons :

$$\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = R_1^2 G_1^2 - 2 R_1 G_1 L_1 C_1 \omega^2 + L_1^2 C_1^2 \omega^4$$

$$4\alpha^2\beta^2 = \omega^2 L_1^2 G_1^2 + 2\omega^2 L_1 G_1 R_1 C_1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2$$

d'où :

$$\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = R_1^2 G_1^2 + \omega^2 L_1^2 G_1^2 + \omega^2 R_1^2 C_1^2 + L_1^2 C_1^2 \omega^4$$

ou : $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_1^2 + L_1^2\omega^2)(G_1^2 + C_1^2\omega^2)}$

En faisant la somme et la différence de $\alpha^2 - \beta^2$ et $\alpha^2 + \beta^2$, on obtient les expressions de α^2 et β^2, d'où finalement les expressions (1) et (2) de α et β.

EXERCICE 6.2

1) Dans l'expression (3) de Z_c, il est possible de négliger les termes en G_1^2 et $R_1 G_1$; dans ces conditions :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1 C_1 \omega^2 + j\omega(L_1 G_1 - R_1 C_1)}{C_1^2 \omega^2}}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1} + j\frac{L_1 G_1 - R_1 C_1}{C_1^2 \omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\sqrt{1 + j\frac{L_1 G_1 - R_1 C_1}{L_1 C_1 \omega}}$$

Comme R_1 et G_1 sont faibles et compte tenu des ordres de grandeur de C_1, L_1 et ω, la seconde racine est de la forme $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$ donc :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left|1 + j\left(\frac{G_1}{2C_1\omega} - \frac{R_1}{2L_1\omega}\right)\right|$$

2) Dans ce cas ($G_1 = 0$) :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left|1 - j\frac{R_1}{2L_1\omega}\right|$$

Comme $\alpha = \frac{1}{2} R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ (relation (6))

et $\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1}$ (relation (4))

nous avons : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1}{L_1\omega}$

Donc : $Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left|1 - j\frac{\alpha}{\beta}\right|$

EXERCICE 6.3

Par définition des Nepers :

$$K(\text{Np}) = \frac{1}{2}\ln\frac{P(0)}{P(\ell)} = \frac{1}{2}\ln e^{-2\alpha\ell} = -\alpha\ell$$

Cette relation nous montre que l'unité naturelle de α est le Neper par mètre (Np/m).

Par définition des Décibels :

$$K(\text{dB}) = 10\lg\frac{P(0)}{P(\ell)} = 10\lg e^{-2\alpha\ell}$$

Comme $\ln x = 2{,}3026 \lg x$, nous avons :

$$\frac{1}{2}\ln\frac{P(0)}{P(\ell)} = 1{,}1513\lg\frac{P(0)}{P(\ell)} = \frac{10}{8{,}686}\lg\frac{P(0)}{P(\ell)}$$

Donc : $K(\text{Np}) = \frac{1}{8{,}686} K(\text{dB})$

et : $K(\text{dB}) = 8{,}686\, K(\text{Np})$

La valeur numérique de K en Décibels est donc égale à 8,686 fois la valeur numérique de K en Nepers ; d'où l'on tire que :

1 Np = 8,686 dB et 1dB = 0,115 Np

EXERCICE 6.4

La perte due à l'affaiblissement linéique de la ligne est :

$$\alpha\ell = 0{,}1\ (\text{dB/m}) \cdot 10\ (\text{m}) = \underline{1\ \text{dB}}.$$

La perte due à la désadaptation est donnée par l'abaque de la figure 7. Calculons le R.O.S. :

$$\rho = \frac{1 + \Gamma_R}{1 - \Gamma_R} \text{ avec } \Gamma_R = \frac{|Z_R - Z_c|}{|Z_R + Z_c|}$$

Comme Z_R et Z_c sont réels et que $Z_R > Z_c$, nous avons :

$$\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \text{ d'où } \rho = \frac{Z_R}{Z_c} = 4$$

Nous lisons sur l'abaque une perte de 0,9 dB correspondant à $\alpha\ell = 1$ dB et $\rho = 4$.

La perte totale est donc de 1,9 dB.

Si $Z_R < Z_c$, nous avons :

$$\Gamma_R = \frac{Z_c - Z_R}{Z_R + Z_c} \text{ d'où } \rho = \frac{Z_c}{Z_R} = 4.$$

Le résultat reste le même.

EXERCICES DU CHAPITRE 8

Lignes bifilaires et coaxiales

EXERCICE 8.1

a) Calcul de R_1

La résistance d'un conducteur par unité de longueur est :

$$R_1 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{s}$$

où σ est la conductivité et s la section où circulent les courants.

Dans notre cas, à cause de l'effet de Peau, les courants pénètrent à une profondeur :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}$$

c'est-à-dire pour le conducteur intérieur (extérieur) dans une couronne de section $2\pi r_1 \delta$ ($2\pi r_2 \delta$) puisque $\delta \ll r_1, r_2$.

La résistance linéique due au conducteur intérieur est donc :

$$R_1' = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{1}{2\pi r_1} \sqrt{\pi \mu_0 \sigma_1 f} = \frac{1}{d_1} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi \sigma_1}}$$

De même, la résistance linéique du conducteur extérieur est :

$$R_1'' = \frac{1}{d_2} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi \sigma_2}}$$

D'où :

$$R_1 = R_1' + R_1'' = \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi}} \left(\frac{1}{d_1 \sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2 \sqrt{\sigma_2}} \right)$$

b) Calcul de L_1

D'après le théorème d'Ampère, le courant I qui circule à la surface du conducteur intérieur du coaxial est égal à la circulation du champ magnétique H sur la circonférence d'un cercle de rayon r ($r_1 < r < r_2$) : $I = 2\pi r H$.

D'où l'induction magnétique :

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Le flux de B à travers une surface de longueur ℓ parallèle à l'axe du coaxial et de largeur dr est :

$$\mu_0 \frac{I}{2\pi r} \ell \, dr$$

Le flux total est donc :

$$\Phi = \mu_0 \frac{I\ell}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{I\ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

L'inductance par unité de longueur est :

$$L_1 = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\Phi}{I}$$

D'où : $L_1 = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$

c) Calcul de C_1

Soit Q_1 la charge par unité de longueur sur le conducteur central du coaxial. Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r ($r_1 < r < r_2$) et de longueur ℓ : le flux de l'induction électrique $D = \varepsilon E$ (qui est radiale) à travers cette surface est égal à la charge qui se trouve sur le conducteur central.

$$2\pi r \ell D = Q_1 \ell \text{ d'où } E = \frac{Q_1}{2\pi r \varepsilon}$$

La tension entre les deux conducteurs du coaxial est donc :

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

La capacité par unité de longueur est $C_1 = Q_1/V$.

D'où : $C_1 = 2\pi\varepsilon \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$

d) Calcul de G_1

Pour un milieu diélectrique avec des pertes conductrices caractérisées par une conductivité σ, le courant en régime variable est

$$\underline{\vec{J}} = \sigma \underline{\vec{E}} + j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}}.$$

En termes de circuit, cette relation s'écrit : $\underline{I} = G\underline{V} + j\omega C\underline{V}$. La conductance linéique peut donc être obtenue en remplaçant ε par σ dans la formule de C_1.

D'où : $G_1 = 2\pi\sigma \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$

Comme le facteur de pertes d'un milieu diélectrique est $\operatorname{tg}\delta = \sigma/\omega\varepsilon$, nous avons :

$$G_1 = 4\pi^2 \varepsilon f \operatorname{tg}\delta \frac{1}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$$

EXERCICE 8.2

Nous avons vu au chapitre 6 que, pour une ligne à faibles pertes :

$$\alpha = \frac{1}{2}\left| R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \right|$$

$$\frac{1}{2} R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = \alpha_c$$

représente les pertes dans les conducteurs.

$$\frac{1}{2} G_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \alpha_d$$

représente les pertes dans le diélectrique.

Compte tenu des expressions (1) à (4) pour les paramètres primaires d'une ligne coaxiale, nous obtenons :

$$\alpha_c \text{ (Np/m)} = \sqrt{\pi\varepsilon f}\left| \frac{1}{d_1\sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2\sqrt{\sigma_2}} \right| \frac{1}{\ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}$$

$$\alpha_d \text{ (Np/m)} = \frac{\pi f}{v} \operatorname{tg}\delta$$

Pour exprimer α_c et α_d en dB/m, il suffit de multiplier ces expressions par 8,686 (voir l'exercice 6.3). D'autre part, explicitons numérique-

ment les coefficients de α_c et de α_d :

• $\pi\varepsilon f = \pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r f = \dfrac{1}{36\cdot 10^9}\,\varepsilon_r f$

d'où : $8{,}686\sqrt{\pi\varepsilon f} = \dfrac{8{,}686}{\sqrt{36\cdot 10^9}}\sqrt{\varepsilon_r f}$

$= 4{,}578\cdot 10^{-5}\sqrt{\varepsilon_r f}$

C'est bien le coefficient de α_c (dB/m) dans (10).

• $\dfrac{\pi f}{v} = \pi f\sqrt{\varepsilon\mu} = \pi f\sqrt{\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\mu_0} = \pi f\sqrt{\varepsilon_r}\,\dfrac{1}{c}$

d'où : $8{,}686\,\dfrac{\pi f}{v} = \pi f\sqrt{\varepsilon_r}\,\dfrac{8{,}686}{3\cdot 10^8}$

$= 9{,}096\cdot 10^{-8} f\sqrt{\varepsilon_r}$

C'est bien le coefficient de α_d (dB/m) dans (11).

EXERCICE 8.3

1) D'après les relations (1) et (2) nous obtenons :

$$\frac{R_1}{L_1\,\omega} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\mu_0\,\sigma f}}\left|\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right|\frac{1}{\ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}$$

dont la valeur numérique est $2{,}36\cdot 10^{-3}$.

D'après les relations (3) et (4), nous obtenons :

$$\frac{G_1}{C_1\,\omega} = \operatorname{tg}\delta = 10^{-3}$$

En négligeant $R_1/2L_1\,\omega$ et $G_1/2C_1\,\omega$, l'erreur effectuée est de l'ordre du millième.

2) $Z_c = \sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon}}\;\dfrac{\ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi}$

Or : $\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}} = \dfrac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

D'où : $Z_c = \dfrac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)$

Dans le cas traité :

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{2{,}25}}\ln 3{,}6 = 51{,}24\ \Omega$$

EXERCICE 8.4

1) L'expression de P peut être mise sous la forme :

$$P = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120}\,E_1^2\,\rho_2^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

E_1 et ρ_2 étant imposés, nous pouvons écrire :

$$P = K\left(\frac{1}{x}\right)^2\ln x \text{ avec } K = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120}\,E_1^2\,\rho_2^2 = \text{cte}$$

$$\frac{dP}{dx} = K\,\frac{(\ln x)'\,x^2 - (\ln x)\,(x^2)'}{x^4} = K\,\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

La puissance transportée est maximale si $dP/dx = 0$, soit pour :

$$\ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{0{,}5} = 1{,}65$$

2) $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 1{,}65 \rightarrow \rho_1 = \dfrac{\rho_2}{1{,}65} = 6{,}06\text{ mm}$

$$P = \frac{1}{120}\,(10^5)^2\,(6{,}06\cdot 10^{-3})^2\,0{,}5$$

$= 1{,}53\text{ kW}$

EXERCICES DU CHAPITRE 9

Lignes à bandes et à fentes

EXERCICE 9.1

1) $w/h = 0{,}5$; nous devons donc utiliser la formule (2) d'après laquelle $\varepsilon_e = 5{,}8$.

Ce résultat est confirmé par l'abaque de Wheeler (fig. 11) sur laquelle nous lisons :

$$\sqrt{\varepsilon_e} = 2{,}4.$$

2) D'après cette abaque, nous lisons $Z_0 = 170\ \Omega$, d'où :

$$Z_m = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} = 70{,}83\ \Omega$$

La formule la plus simple est celle d'Hammerstad (10) d'après laquelle : $Z_m = 69{,}51\ \Omega$.

D'après celle de Wheeler (7), nous trouvons $Z_m = 69{,}20\ \Omega$.

Ces formules sont donc en accord à mieux que ! %.

La précision de lecture sur l'abaque est de l'ordre de 2 à 3 %.

EXERCICE 9.2

Dans cette formule (8), Z_m est l'impédance caractéristique de la ligne microbande modélisée par une structure à diélectrique homogène, de permittivité ε_e ; Z_0 est l'impédance caractéristique de la même ligne, mais à diélectrique air ($\varepsilon_e = 1$).

L'impédance caractéristique d'une ligne T.E.M. est donnée, dans l'approximation des lignes sans perte, par :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

D'autre part, la vitesse de propagation sur une telle ligne est :

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

Nous avons donc :

$$Z_c = \frac{1}{v_p C_1}$$

Pour une ligne à diélectrique ε_e :

$$(Z_c)_\varepsilon = \frac{1}{(v_p)_\varepsilon (C_1)_\varepsilon} = Z_m$$

Pour la ligne à diélectrique air :

$$(Z_c)_0 = \frac{1}{(v_p)_0 (C_1)_0} = Z_0$$

Or : $(v_p)_\varepsilon = \dfrac{(v_p)_0}{\sqrt{\varepsilon_e}}$ et $(C_1)_\varepsilon = (C_1)_0\, \varepsilon_e$.

Il en résulte que :

$$Z_m = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_e}}$$

EXERCICE 9.3

Dans la formule (12) on veut que :

$$G\left(\frac{f}{f_d}\right)^2 < \frac{1}{100}$$

Soit : $\left(\dfrac{f}{f_d}\right)^2 < \dfrac{1}{100} \cdot \dfrac{1}{G} \rightarrow f < \dfrac{f_d}{10\sqrt{G}}$

$$G = 0{,}6 + 0{,}009\, Z_m = 1{,}23$$

$$f_0 = \frac{10^7}{8\pi} \cdot \frac{Z_m}{h} = 4{,}386 \cdot 10^{10}$$

D'où : $f < \frac{43{,}86}{11{,}1} \cdot 10^9 = 3{,}95$ GHz

EXERCICE 9.4

D'après le graphique de Hammerstad (fig. 12), nous voyons que $w/h < 2$. Le calcul de w/h se fait donc d'après les formules (15) et (16).

D'après (16) : $A = 2{,}15$
et d'après (15) : $w/h = 0{,}96$
d'où : $w = 0{,}61$ mm.

Compte tenu de l'épaisseur b du ruban, sa largeur doit être calculée d'après la formule (11) dans laquelle $x = h$ puisque $w/h > 1/2\pi$; donc $w_e = w + \Delta w$ avec :

$$\Delta w = \frac{b}{\pi}\left(1 + \ln\frac{2h}{b}\right) = 0{,}0186 \text{ mm}$$

Cette correction est de 3 % en valeur relative.

EXERCICE 9.5

1) Cette fréquence est donnée par la relation (25) d'après laquelle :

$$f_M = 2{,}14\,\frac{9^{1/4}}{0{,}635} = 5{,}837 \text{ GHz}$$

2) α_c se calcule d'après les formules (19) et (21) dans lesquelles nous prendrons $w_e = w$ et $B = h$.

D'après (21) : $A = 3{,}93$.

D'autre part : $R_S = \sqrt{\pi \mu_0 \rho f} = 8{,}425 \cdot 10^{-3}$

d'où l'on calcule, d'après (19) :

$$\alpha_c = 1{,}35 \text{ dB/m}$$

La formule (22), largement surestimée, donnerait : $\alpha_c = 2{,}3$ dB/m.

3) Les pertes dans le diélectrique sont données par (24).

Compte tenu de ce que $\varepsilon_e = 6{,}11$ en appliquant (1) ou (2), nous avons : $\alpha_d = 0{,}212$ dB/m.

EXERCICE 9.6

1) Les couples de solutions possibles sont lus directement à partir de l'abaque de la figure 15.

$$\frac{t}{b} = 0{,}05 \rightarrow \frac{w}{b} = 0{,}7$$

$$\frac{t}{b} = 0{,}10 \rightarrow \frac{w}{b} = 0{,}6$$

$$\frac{t}{b} = 0{,}15 \rightarrow \frac{w}{b} = 0{,}52$$

$$\frac{t}{b} = 0{,}20 \rightarrow \frac{w}{b} = 0{,}45$$

$$\frac{t}{b} = 0{,}25 \rightarrow \frac{w}{b} = 0{,}37$$

2) La fréquence jusqu'à laquelle cette ligne fonctionne en mode T.E.M., dans le cas où $w/b = 0{,}6$ et $b = 1$ cm, se détermine d'après la formule (35) : $f = 7{,}22$ GHz.

EXERCICES DU CHAPITRE 10

Réalisation des impédances et des circuits résonnants

EXERCICE 10.1

1) Réalisation d'une inductance $L = Z_c\, x/v$

Il faut une Z_c élevée, donc $w/h = 0{,}1$.

D'après l'abaque de Wheeler (fig. 11, chap. 9) :

$$Z_0 = 260\ \Omega$$

et : $\sqrt{\varepsilon_e} = 1{,}65 \rightarrow \varepsilon_e = 2{,}72$

d'où : $Z_c = Z_m = 157{,}6\ \Omega$

et : $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_e}} = 1{,}82 \cdot 10^8$ m/s

À 1 GHz :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} = \frac{30}{1{,}65} = 18{,}18\ \text{cm} \rightarrow \frac{\lambda}{12} = 1{,}515\ \text{cm}$$

L'inductance maximale réalisable est donc :

$$L = 0{,}866 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}515 \cdot 10^{-2} = 1{,}312 \cdot 10^{-8}\ H$$

2) Réalisation d'une capacité $C = (1/Z_c)\,(x/v)$

Il faut une Z_c faible, donc $w/h = 5$.

D'après l'abaque de Wheeler :

$$Z_0 = 50\ \Omega \text{ et } \sqrt{\varepsilon_e} = 1{,}8$$

d'où : $Z_c = Z_m = 27{,}8\ \Omega$
et $v = 1{,}667 \cdot 10^8$ m/s.

À 1 GHz :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_e}} = 16{,}67\ \text{cm} \rightarrow \frac{\lambda}{12} = 1{,}39\ \text{cm}$$

La capacité maximale réalisable est donc :

$$C = 0{,}216 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}39 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-12}\ F$$

EXERCICE 10.2

L'impédance aux bornes du circuit série (L', C') est :

$$Z_S = \mathrm{j}\,L'\omega - \frac{\mathrm{j}}{C'\omega} \text{ avec } L'\,C'\,\omega_0^2 = 1$$

Cette impédance peut aussi s'écrire :

$$Z_S = \mathrm{j}\,L'\omega\left|1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right| \qquad (1')$$

ou

$$Z_S = \frac{\mathrm{j}}{C'\omega}\left|\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right| \qquad (2')$$

L'admittance aux bornes du circuit parallèle (L, C) est :

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{\mathrm{j}\,L\omega} + \mathrm{j}\,C\omega \text{ avec } LC\,\omega_0^2 = 1$$

Cette admittance peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{\mathrm{j}\,L\omega}\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right|$$

ou

$$\frac{1}{Z_p} = \mathrm{j}\,C\omega\left|1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right|$$

Après la ligne $\lambda/4$, nous avons : $Z_A = Z_c^2/Z_p$, soit :

$$Z_A = \frac{Z_c^2}{\mathrm{j}\,L\,\omega}\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right| \qquad (3')$$

ou

$$Z_A = \mathrm{j}\,Z_c^2\,C\omega\left|1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right| \qquad (4')$$

En identifiant (1') et (3'), nous trouvons :

$$L\,\omega_0 = \frac{Z_c^2}{L'\,\omega_0}$$

En identifiant (2') et (4'), nous trouvons :

$$C\,\omega_0 = \frac{Y_c^2}{C'\,\omega_0}$$

EXERCICE 10.3

Nous savons que :

$$\frac{K}{Z_c} = \text{tg}\left|\frac{\theta}{2}\right| = \text{tg}\left|\frac{\pi\ell}{\lambda}\right|$$

Cette relation permet donc de déterminer ℓ :

$$\left|\frac{\pi\ell}{\lambda}\right| = \text{arctg}\left(\frac{K}{Z_c}\right) \rightarrow \ell = \pm\frac{\lambda}{\pi}\,\text{arctg}\left(\frac{K}{Z_c}\right)$$

D'autre part, nous pouvons écrire :

$$\frac{\dfrac{K}{Z_c}}{1-\left(\dfrac{K}{Z_c}\right)^2} = \frac{\text{tg}\left|\dfrac{\theta}{2}\right|}{1-\text{tg}^2\left|\dfrac{\theta}{2}\right|} = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,|\theta$$

Comme $\text{tg}|\theta| = \left|\dfrac{2X}{Z_c}\right|$, nous avons :

$$\frac{X}{Z_c} = \pm\frac{\dfrac{K}{Z_c}}{1-\left(\dfrac{K}{Z_c}\right)^2}$$

Compte tenu de ce que $\theta = -\text{arctg}\,(2X/Z_c)$ (18), les couples de solutions sont :

$$\ell > 0 \text{ et } X < 0 \text{ ou } \ell < 0 \text{ et } X > 0$$

EXERCICE 10.4

a) L'impédance d'entrée du circuit résonnant série s'écrit :

$$Z_{AB} = R + \text{j}\,L\omega\left(1 - \frac{1}{LC\,\omega^2}\right)$$

$$= R + \text{j}\,L\omega\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

Or : $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0) \simeq 2\omega_0\,\Delta\omega$

$$Z_{AB} = R + \text{j}\,L\omega\,\frac{2\omega_0\,\Delta\omega}{\omega^2}$$

$$= R + 2\text{j}\,L\,\frac{\omega_0}{\omega}\,\Delta\omega$$

Donc : $X(\omega) = 2L\,\dfrac{\omega_0}{\omega}\,\Delta\omega$, relation (27)

d'où : $\dfrac{dX}{d\omega} = 2L\,\dfrac{\omega_0}{\omega}$

et pour $\omega \simeq \omega_0$, $\dfrac{dX}{d\omega} = 2L$, relation (28)

b) L'impédance d'entrée d'une ligne en court-circuit est :

$$Z_e = \text{j}\,Z_c\,\text{tg}\,\beta\ell$$

dans notre cas : $\ell = \lambda_0/2$.

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda_0}{2} = \pi\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$= \pi\,\frac{\omega_0+\Delta\omega}{\omega_0} = \pi + \pi\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$\text{tg}\,\beta\ell = \text{tg}\left(\pi + \pi\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

$$= \text{tg}\left(\pi\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \simeq \pi\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Compte tenu de la présence de R en série, nous avons :

$$Z_{AB} = R + \text{j}\,Z_c\,\pi\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

de la forme $R + \text{j}X$ avec :

$$X(\omega) = Z_c\,\pi\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \text{relation (29)}$$

Pour $\omega \simeq \omega_0$:

$$\frac{dX}{d\omega} = Z_c\,\frac{\pi}{\omega_0} = \frac{Z_c}{2f_0}, \text{ relation (30)}$$

EXERCICES DU CHAPITRE 11

Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques

EXERCICE 11.1

1) $\dfrac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} > 10 \rightarrow \dfrac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon_r} > 10$

d'où : $f < \dfrac{\sigma}{20\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r} \cdot \dfrac{36\pi \cdot 10^9}{20\pi}$

$$= \frac{1{,}8\sigma}{\varepsilon_r} 10^9$$

Pour l'eau de mer :

$$f < \frac{1{,}8 \cdot 3}{70} \cdot 10^9 = 77{,}143 \text{ MHz}$$

2) $\underline{R} = \dfrac{\underline{\zeta}_c - \zeta_d}{\underline{\zeta}_c + \zeta_d}$ avec $\underline{\zeta}_c = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\sigma}}\ (1 + j)$

et : $\zeta_d = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$

$$\underline{\zeta}_c = \sqrt{\frac{2\pi f \cdot \mu_0}{2\sigma}}\ (1 + j)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6}}\ (1 + j)$$

$$\underline{\zeta}_c = 2\pi \sqrt{0{,}333}\ (1 + j) = 2\pi \cdot 0{,}577\ (1 + j)$$

donc : $\dfrac{\underline{\zeta}_c}{\zeta_d} \simeq 0{,}01\ (1 + j)$

et : $\underline{R} = \dfrac{0{,}01\ (1 + j) - 1}{0{,}01\ (1 + j) + 1} = \dfrac{-0{,}99 + 0{,}01\ j}{1{,}01 + 0{,}01\ j}$

$$\underline{R} = \frac{99\ e^{-j\,0{,}58°}}{101\ e^{j\,0{,}57°}} = 0{,}98\ e^{-j\,1{,}15°}$$

EXERCICE 11.2

Cas TE : $\zeta_{TE} = \dfrac{\zeta_0}{\cos \psi}$

Cas TM : $\zeta_{TM} = \zeta_0 \cos \psi$

Dans notre cas :

$\zeta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ et $\cos \psi = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Donc : $\zeta_{TE} = 266{,}62\ \Omega$ et : $\zeta_{TM} = 533{,}24\ \Omega$

EXERCICE 11.3

1) $\dfrac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} < \dfrac{1}{10} \rightarrow \dfrac{2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma} > 10$

d'où : $f > \dfrac{10\sigma}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{10\sigma}{\varepsilon_r} \cdot \dfrac{36\pi \cdot 10^9}{2\pi}$

$$= \frac{180\sigma}{\varepsilon_r} 10^9$$

Pour le sol moyennement sec :

$$f > \frac{180 \cdot 10^{-3} \cdot 10^9}{15} = 12 \text{ MHz}$$

2) $R_\perp = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2}$

et : $R_{//} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_1}$

Dans ces deux formules, nous avons : $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ et $\underline{\varepsilon}_2$ complexe de la forme :

$$\underline{\varepsilon}_2 = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Dans notre cas :

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r} = \frac{10^{-3}\cdot 36\pi\cdot 10^9}{2\pi\cdot 10^9\cdot 15} = \frac{18}{15}\,10^{-3}$$

Nous allons donc pouvoir négliger la partie imaginaire de $\underline{\varepsilon}_2$.

Donc : $R_\perp = \dfrac{\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_2}{\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_2}$

et : $R_{//} = \dfrac{\cos\theta_2 - \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_1}{\cos\theta_2 + \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_1}$

$\theta_1 = 60°$ et θ_2 se calcule d'après :

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sin\theta_1 = 0{,}2236 \rightarrow \theta_2 = 12{,}92°$$

Dans ces conditions, nous obtenons :

$$R_\perp = \frac{0{,}5 - 3{,}775}{0{,}5 + 3{,}775} = -\frac{3{,}275}{4{,}275} = -0{,}766$$

$$R_{//} = \frac{0{,}975 - 1{,}936}{0{,}975 + 1{,}936} = -\frac{0{,}961}{2{,}911} = -0{,}330$$

EXERCICE 11.4

1) Écrivons les vecteurs de Poynting de chaque onde, en tenant compte de ce que :

$$\frac{\underline{E}_i}{\underline{H}_i} = -\frac{\underline{E}_r}{\underline{H}_r} = \zeta_1 \text{ et } \frac{\underline{E}_t}{\underline{H}_t} = \zeta_2$$

$$\vec{\underline{P}}_i = \frac{1}{2}\vec{\underline{E}}_i \wedge \vec{\underline{H}}_i^* = \frac{1}{2}\underline{E}_i\underline{H}_i^*\,\vec{u}_i = \frac{1}{2}\cdot\frac{E_i^2}{\zeta_1}\vec{u}_i$$

$$\vec{\underline{P}}_r = \frac{1}{2}\vec{\underline{E}}_r \wedge \vec{\underline{H}}_r^* = \frac{1}{2}\underline{E}_r\underline{H}_r^*\,\vec{u}_r = -\frac{1}{2}\cdot\frac{E_r^2}{\zeta_1}\vec{u}_r$$

$$\vec{\underline{P}}_t = \frac{1}{2}\vec{\underline{E}}_t \wedge \vec{\underline{H}}_t^* = \frac{1}{2}\underline{E}_t\underline{H}_t^*\,\vec{u}_t = \frac{1}{2}\cdot\frac{E_t^2}{\zeta_2}\vec{u}_t$$

La loi de conservation de la puissance s'écrit, sur l'interface Σ :

$$\vec{\underline{P}}_i = \vec{\underline{P}}_r + \vec{\underline{P}}_t$$

d'où : $\dfrac{E_i^2}{\zeta_1}\vec{u}_i = -\dfrac{E_r^2}{\zeta_1}\vec{u}_r + \dfrac{E_t^2}{\zeta_2}\vec{u}_t$

2) En projection sur l'axe des z, nous avons :

$$E_i^2\,\vec{u}_i\cdot\vec{z} = -E_r^2\,\vec{u}_r\cdot\vec{z} + \frac{\zeta_1}{\zeta_2}E_t^2\,\vec{u}_t\cdot\vec{z}$$

$$E_i^2\cos\theta_1 = -E_r^2\cos(\pi - \theta_1) + \frac{\zeta_1}{\zeta_2}E_t^2\cos\theta_2$$

En divisant par $E_i^2\cos\theta_1$ pour faire apparaître R^2 et T^2, il vient :

$$1 = R^2 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2}T^2\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

3) On vérifie l'exactitude de cette relation aussi bien pour les coefficients $R_\perp$ et $T_\perp$ donnés par (84) et (85) que pour les coefficients $R_{//}$ et $T_{//}$ donnés par (96) et (97).

EXERCICES DU CHAPITRE 12

Les guides d'ondes rectangulaires

EXERCICE 12.1

1) Les champs de l'onde qui se propage dans le guide sont tous affectés d'un facteur en :

$$e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z\cos\psi}$$

avec : $\cos\psi = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ et $\lambda_c = 2a$.

Si $\lambda > \lambda_c$, nous avons : $1-(\lambda/\lambda_c)^2 < 0$ et l'on peut écrire :

$$\cos\psi = \sqrt{j^2\left|\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1\right|} = \pm j\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$$

Les champs sont donc affectés d'un facteur en :

$$e^{\left(\pm\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2-1}\right)}$$

Seule la solution avec le signe – permet de traduire un affaiblissement exponentiel caractérisé par le paramètre :

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$$

Donc : $E(z) = E_0\, e^{-\alpha z}$

L'affaiblissement en décibels est donné par :

$$A\,(\text{dB}) = 20\log\frac{E(z)}{E_0} = 20\log e^{-\alpha z}$$

$$= 8{,}686\ln e^{-\alpha z}$$

La fonction qui donne l'affaiblissement est donc :

$$A\,(\text{dB}) = -8{,}686\,\alpha z$$

$$= -8{,}686\,2\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$$

D'où : $A\,(\text{dB}) = -54{,}6\frac{z}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$

2) Pour $z = \lambda$,

$$A\,(\text{dB}) = -54{,}6\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$$

Si $\lambda = \sqrt{2}\,\lambda_c \rightarrow A = -54{,}6$ dB

Si $\lambda = 1{,}2\,\lambda_c \rightarrow A = -36{,}2$ dB

EXERCICE 12.2

1) Le champ magnétique a deux composantes orthogonales H_x et H_z.

Pour qu'il soit à polarisation circulaire, il faut que : $\underline{H}_x = \pm j\,\underline{H}_z$. Le signe plus (moins) correspond à la polarisation circulaire droite (gauche),

d'où : $\cos\psi\sin\frac{\pi x}{a} = \pm\sin\psi\cos\frac{\pi x}{a}$

et : $\text{tg}\frac{\pi x}{a} = \pm\frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \pm\frac{\lambda}{\lambda_c}\cdot\frac{\lambda_g}{\lambda} = \pm\frac{\lambda_g}{\lambda_c}$

La solution $\text{tg}\frac{\pi x_1}{a} = \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \rightarrow x_1 = \frac{a}{\pi}\,\text{arctg}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_c}\right)$

correspond à : $0 < \frac{\pi x_1}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ soit $0 < x_1 < \frac{a}{2}$

La solution

$$\text{tg}\frac{\pi x_2}{a} = -\frac{\lambda_g}{\lambda_c} \rightarrow x_2 = \frac{a}{\pi}\,\text{arctg}\left(-\frac{\lambda_g}{\lambda_c}\right)$$

correspond à : $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi x_2}{a} < \pi$ soit $\frac{a}{2} < x_2 < a$

2) Remarquons que :

$$\frac{\pi x_2}{a} = \pi - \frac{\pi x_1}{a} \rightarrow x_2 = a - x_1$$

Si $f = f_c\sqrt{2}$, $\lambda = \frac{\lambda_c}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow \sin\psi = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où : $x_1 = \frac{a}{4}$ et $x_2 = \frac{3a}{4}$.

EXERCICE 12.3

1) Le courant surfacique est donné par le vecteur $\vec{J} = \vec{n} \wedge \vec{H}$; $\vec{n}$ est la normale unitaire à la face considérée du guide.

Les expressions des composantes de $\vec{H}$ en mode fondamental sont données par les relations (26) pour $\underline{H}_x$ et (27) pour $\underline{H}_z$.

a) Sur les faces parallèles à xOz

$$\vec{J} = \vec{y} \wedge (\vec{H}_x + \vec{H}_z) = \vec{y} \wedge \vec{H}_x + \vec{y} \wedge \vec{H}_z = \vec{J}_z + \vec{J}_x$$

$\vec{J}$ a donc deux composantes :

- l'une en x, d'amplitude complexe $\underline{J}_x = \underline{H}_z$ (relation 27)
- l'autre en z, d'amplitude complexe : $\underline{J}_z = \underline{H}_x$ (relation 26)

b) Sur les faces parallèles à yOz

$$\vec{J} = \vec{x} \wedge (\vec{H}_x + \vec{H}_z) = \vec{x} \wedge \vec{H}_z = \vec{J}_y$$

$\vec{J}$ n'a qu'une composante en y dont l'amplitude complexe est $\underline{J}_y = \underline{H}_z$ (relation 27).

2) a) Au milieu de la face supérieure ($//xOz$) du guide, nous avons :

$$x = \frac{a}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi x}{a} = 0 \text{ et } \sin\frac{\pi x}{a} = 1$$

La composante J_x est nulle tandis que J_z a une amplitude maximale. Donc, au milieu de la face supérieure (ou inférieure) du guide, il y a une ligne de courant parallèle à l'axe Oz (fig. 8).

b) Sur les faces latérales du guide, qui sont parallèles à yOz, il n'y a qu'une composante J_y ; donc les lignes de courant sont verticales (fig. 8).

EXERCICE 12.4

1) D'après la relation (31), nous avons :

$$E^2 = 4P\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}}$$

$$\lambda = 3 \text{ cm} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}} = 0{,}747$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

$$E^2 = 4 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 377 \frac{10^6}{232{,}26} \cdot \frac{1}{0{,}747}$$

$$= 173{,}87 \cdot 10^3 \rightarrow E = 417 \text{ V/m}$$

2) $P_M = \frac{1}{4} E_M^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}\ ab$

$$P_M = \frac{1}{4}(15 \cdot 10^5)^2 \frac{1}{377} 0{,}747 \cdot 232{,}26 \cdot 10^{-6}$$

$$\rightarrow P_M = 258{,}867 \text{ kW}.$$

EXERCICE 12.5

1) Condition de propagation du mode TE_{10} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{10} = 2a \rightarrow a > \frac{\lambda}{2} \qquad (C1)$$

Condition de non propagation des modes TE_{m0} ($m \geq 2$) :

$$\lambda > (\lambda_c)_{20} = a \rightarrow a < \lambda \qquad (C2)$$

Condition de non propagation des modes TE_{on} ($n \geq 1$) :

$$\lambda > (\lambda_c)_{01} = 2b \rightarrow b < \frac{\lambda}{2} \qquad (C3)$$

Condition de non propagation du mode TE_{11} :

$$\lambda > (\lambda_c)_{11}$$

Or : $(\lambda_c)_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2b}\right)^2}} = \dfrac{2b}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$

d'où : $b < \dfrac{\lambda}{2}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ (C4)

La synthèse des conditions (C1) à (C4) nous donne :

$$\frac{\lambda}{2} < a < \lambda \quad \text{et} \quad b < \frac{\lambda}{2}$$

À la fréquence de 10 GHz : $\lambda = 3$ cm ; donc :

$$1{,}5 \text{ cm} < a < 3 \text{ cm et } b < 1{,}5 \text{ cm}.$$

2) À 8 GHz : $\lambda_8 = 3{,}75$ cm
À 12 GHz : $\lambda_{12} = 2{,}5$ cm

Les conditions écrites au 1) deviennent :

$$\frac{\lambda_8}{2} < a < \lambda_{12} \quad \text{et} \quad b < \frac{\lambda_{12}}{2}$$

Soit : 1,875 cm $< a <$ 2,5 cm et $b <$ 1,25 cm.

EXERCICE 12.6

1) Notons λ_1 la longueur d'onde inférieure (fréquence f_1) et λ_2 la longueur d'onde supérieure (fréquence f_2)

Condition de propagation du mode TE_{10} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{10} \text{ d'où } \lambda_2 < 2a$$

Condition de non propagation des modes TE_{mo} ($m \geq 2$) :

$$\lambda > (\lambda_c)_{20} \text{ d'où } \lambda_1 > a$$

Condition de non propagation des modes TE_{on} ($n \geq 1$) :

$$\lambda > (\lambda_c)_{01} \text{ d'où } \lambda_1 > 2b$$

NB

Comme $(\lambda_c)_{01} > (\lambda_c)_{11}$, il en résulte que le mode TE_{11} et les autres modes TE_{mn} ne peuvent se propager.

→ Puisque $a > 2b$, la synthèse de ces trois conditions nous donne :

$\lambda_1 > a = 47{,}55$ mm d'où $f_1 < 6{,}31$ GHz
$\lambda_2 < 2a = 95{,}10$ mm d'où $f_2 > 3{,}155$ GHz

La bande passante du guide est donc :

$$3{,}155 \text{ GHz} \rightarrow 6{,}31 \text{ GHz}$$

2) Si le guide est rempli de diélectrique, les conditions concernant les longueurs d'onde restent inchangées. Par contre, puisque :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

les conditions concernant les fréquences sont divisées par :

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5.$$

Par conséquent, la bande passante du guide est :

$$2{,}103 \text{ GHz} \rightarrow 4{,}206 \text{ GHz}.$$

EXERCICE 12.7

1) Condition de propagation des modes fondamentaux TE_{10} et TE_{01} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{01} = (\lambda_c)_{10} = 2a \rightarrow \lambda < 4{,}8 \text{ cm}.$$

2) Recherche du premier mode supérieur :

$$(\lambda_c)_{02} = (\lambda_c)_{20} = a$$

$$(\lambda_c)_{11} = \frac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{a}\right)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

Le premier mode supérieur est donc TE_{11}.

Condition de non propagation de ce mode :

$$\lambda > (\lambda_c)_{11} \rightarrow \lambda > a\sqrt{2} \rightarrow \lambda > 3{,}4 \text{ cm}$$

3) Bande passante en mode fondamental

$\lambda < 4{,}8$ cm $\rightarrow f > 6{,}25$ GHz
$\lambda > 3{,}4$ cm $\rightarrow f < 8{,}82$ GHz

La bande passante va donc de 6,25 à 8,82 GHz.

EXERCICE 12.8

Le coefficient d'atténuation se calcule d'après la formule (50) dans laquelle :

$$R_S = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$$

Le champ magnétique a deux composantes dont les modules sont :

$$H_x = H \frac{\lambda}{\lambda_g} \sin \frac{\pi x}{a} \text{ et } H_z = H \frac{\lambda}{\lambda_c} \cos \frac{\pi x}{a}$$

Donc :

$$H_t^2 = H^2 \left| \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right|$$

- L'intégrale du numérateur doit être évaluée sur le contour de la section transversale du guide :
 - sur la face supérieure ou inférieure, qui est parallèle à xOz :

$$\int_0^a H_t^2 \, d\ell = H^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} \, dx + H^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} \, dx = H^2 \left| \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right| \frac{a}{2} = H^2 \frac{a}{2}$$

 - sur une face latérale, parallèle à yOz, où $x = 0$ ou $x = a$

$$H_x(x=0) = H_x(x=a) = 0$$

$$H_z(x=0) = -H_z(x=a) = H \frac{\lambda}{\lambda_c}$$

Donc : $H_t^2 = H_z^2 = H^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2$

et : $\int_0^b H_t^2 \, d\ell = H^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 b$

Au total : $\oint H_t^2 \, d\ell = H^2 \left| a + 2b \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right|$

- Le dénominateur représente le double de la puissance transmise par le guide. En mode fondamental, il est donné, d'après la relation (31) par :

$$\iint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{z} \, dS = \frac{1}{2} E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} \, ab$$

- La relation (50) s'écrit donc :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \cdot \frac{H^2 \left| a + 2b \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right|}{E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \cdot \frac{1}{ab}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi \varepsilon f}{\sigma} \cdot \frac{\mu}{\mu_0}} \frac{a + 2b \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \cdot \frac{1}{ab}$$

Remplaçons f par :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\lambda_c} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{v}{2a} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi \varepsilon v}{\sigma} \cdot \frac{\mu}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\, a^{3/2}} \cdot \frac{\frac{a}{b} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^{1/2} + 2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^{3/2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}}$$

En remplaçant λ/λ_c par f_c/f nous obtenons enfin la formule (51).

EXERCICES DU CHAPITRE 13

Étude générale de la propagation

EXERCICE 13.1

Le déphasage subi par l'onde est donné par :

$$\varphi = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_g}$$

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{1}{\lambda_c}\sqrt{\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 - 1}$$

avec : $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{f}$ et $\lambda_c = \frac{c}{f_c}$;

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Donc : $\frac{1}{\lambda_g} = \frac{f_c}{c}\sqrt{\varepsilon_r\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1} = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \frac{1}{\ell}$

D'où : $\varepsilon_r\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \frac{c}{f_c}\right)^2$

Nous avons : $f = 3 \cdot 10^9$ Hz ; $f_c = 9 \cdot 10^9$ Hz ; $\ell = 2$ cm ; $\varphi = 288°$

$$\rightarrow \varepsilon_r\left(\frac{1}{9}\right) = 1 + \left(\frac{288}{360} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^9}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{12}{9}\right)^2$$

Soit : $\varepsilon_r = 25$.

EXERCICE 13.2

1) À 15 GHz :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} f} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{1{,}6 \cdot 15 \cdot 10^9} = 1{,}25 \text{ cm}$$

- Les modes TE_{mo} propagatifs doivent satisfaire la condition :

$$\lambda < (\lambda_c)_{mo} = \frac{2a}{m} \rightarrow m < \frac{2a}{\lambda} = 3{,}2$$

Il y a donc propagation de TE_{10}, TE_{20} et TE_{30}.

- Les modes TE_{on} propagatifs doivent satisfaire la condition :

$$\lambda < (\lambda_c)_{on} = \frac{2b}{n} \rightarrow n < \frac{2b}{\lambda} = 1{,}6$$

Il y a donc propagation de TE_{01}.

- Les modes TE_{mn} propagatifs doivent satisfaire la condition :

$$\lambda < (\lambda_c)_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{m^2 + n^2\left(\frac{a}{b}\right)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{m^2 + 4n^2}}$$

d'où : $\sqrt{m^2 + 4n^2} < \frac{2a}{\lambda} = 3{,}2$

Il y a donc propagation de TE_{11} et TE_{21}.

2) Sur la figure ci-après :

- les points situés en abscisses (ordonnées) représentent la valeur de $2/\lambda_c$ pour les modes TE_{mo} (TE_{on}) ;
- les intersections des droites représentent $2/\lambda_c$ des modes TE_{mn}

Traçons un cercle de rayon $2/\lambda = 1{,}6$ cm^{-1} (le point représentatif de $1/b$ correspond à 1 cm^{-1}). Les points représentatifs de $2/\lambda_c$ situés à l'intérieur de ce cercle (et qui sont tels que $2/\lambda_c < 2/\lambda \Leftrightarrow \lambda < \lambda_c$) correspondent donc aux modes propagatifs. Nous voyons ainsi que les modes propagatifs sont : TE_{10}, TE_{20}, TE_{30}, TE_{01}, TE_{11} et TE_{21}.

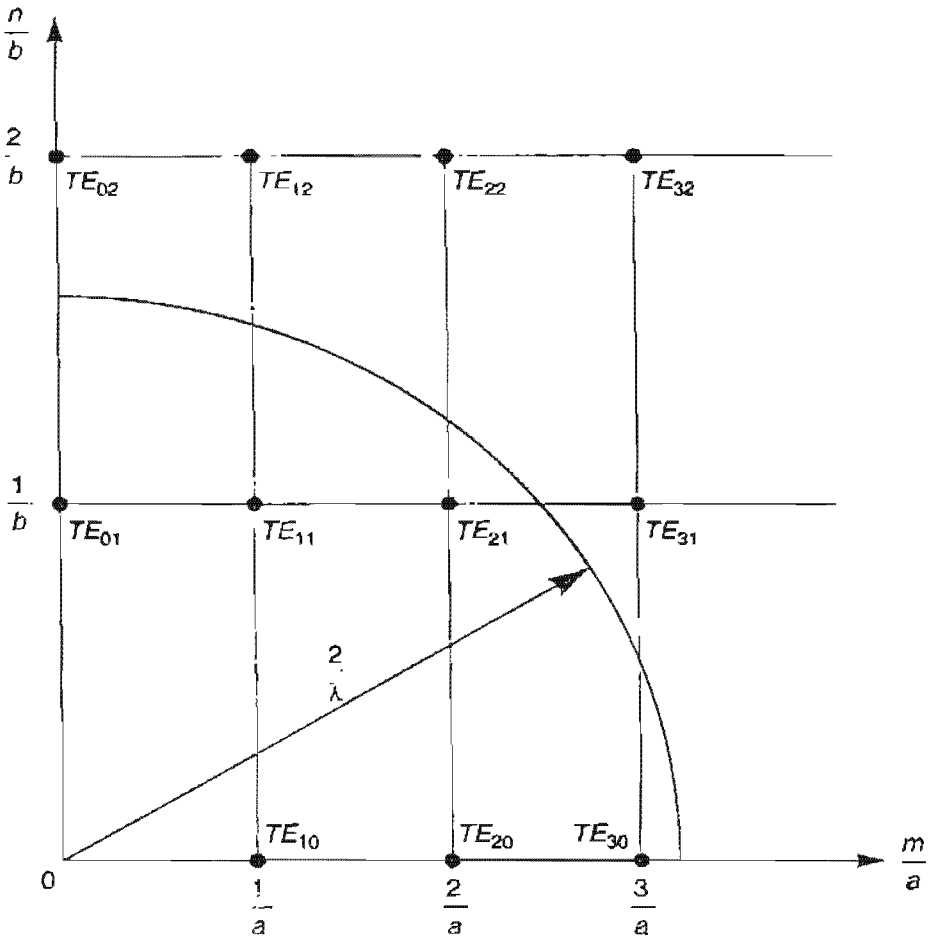


Figure E.12.

EXERCICE 13.3

La relation qui synthétise la condition de propagation du mode fondamental TE_{10} et les conditions de non propagation des modes TE_{m0} ($m \geq 2$), TE_{0n} ($n \geq 1$) et TE_{mn} ($m \geq 1$ et $n \geq 1$) est :

$$\frac{\lambda}{2} < a, 2b < \lambda \qquad \text{(C1)}$$

Dans une bande de fréquences, dont les longueurs d'onde inférieure et supérieure sont λ_i et λ_s, nous avons :

$$\frac{\lambda_s}{2} < a, 2b < \lambda_i \qquad \text{(C2)}$$

La largeur de bande est donnée par :

$$\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_i = \lambda_i \left| \frac{\lambda_s}{\lambda_i} - 1 \right|$$

La largeur de bande maximale $\Delta\lambda_M$ correspond à la valeur maximale du rapport λ_s/λ_i ; comme $\lambda_s < 2\lambda_i$, il vient :

$$\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}\right)_M = 2 \rightarrow \Delta\lambda_M = \lambda_i$$

Dans ce cas, il résulte de l'inégalité (C2) que : $a = 2b$.

Remarquons que, dans ces conditions, les modes TE_{20} et TE_{01} apparaissent simultanément.

EXERCICE 13.4

1) a) Soient λ_1 et λ_2 ($\lambda_2 < \lambda_1$) les longueurs d'onde correspondant à f_1 et f_2 :

- Condition de propagation du mode TE_{10} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{10} \rightarrow \lambda_1 < 2a \qquad \text{(C1)}$$

- Condition de propagation du mode TE_{01} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{01} \rightarrow \lambda_1 < 2b \qquad (C2)$$

- Condition de non propagation du mode TE_{11} :

$$\lambda > (\lambda_c)_{11} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^2}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \simeq a\sqrt{2}$$

d'où l'on déduit : $a\sqrt{2} < \lambda_2$ (C3)

Notons que cette condition implique, *a fortiori*, la non propagation des modes TE_{20} et TE_{02} dont les longueurs d'onde de coupure sont a et b.

Finalement, la synthèse des conditions (C1) à (C3) nous donne :

$$\frac{\lambda_1}{2} < b \leqslant a < \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \qquad (C4)$$

b) On déduit de (C4) la relation qu'il doit y avoir entre f_1 et f_2 :

$$f_2 < \sqrt{2}\, f_1$$

$$f_1 = 9 \text{ GHz} \rightarrow \frac{\lambda_1}{2} = 1{,}665 \text{ cm}$$

$$f_2 = 11 \text{ GHz} \rightarrow \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} = 1{,}93 \text{ cm}$$

La condition (C4) est bien vérifiée pour :

$$a = 1{,}8 \text{ cm et } b = 1{,}7 \text{ cm.}$$

2) a) Pour le mode TE_{10}, le paramètre de phase est :

$$\beta_{10} = \frac{2\pi}{\lambda_{g_{10}}} \text{ avec } \lambda_{g_{10}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_{10}}}\right)^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

Pour le mode TE_{01}, le paramètre de phase est :

$$\beta_{01} = \frac{2\pi}{\lambda_{g_{01}}} \text{ avec } \lambda_{g_{01}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2}}$$

Sur une longueur L de guide, le déphasage entre ces deux modes est :

$$\Delta\varphi = \beta_{10} L - \beta_{01} L$$

$$= 2\pi \frac{L}{\lambda}\left|1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right|^{1/2} - 2\pi \frac{L}{\lambda}\left|1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2\right|^{1/2}$$

b) Pour avoir une polarisation circulaire, il faut que $\Delta\varphi = \pi/2$

$$\rightarrow L_0 = \frac{\lambda}{4}\left|\left|1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right|^{1/2} - \left|1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2\right|^{1/2}\right|^{-1}$$

Pour $a = 1{,}8$ cm ; $b = 1{,}7$ cm et $\lambda = 3$ cm, nous trouvons :

$$L_0 = 9{,}125 \text{ cm.}$$

EXERCICE 13.5

1) Pour $f_1 = 16$ GHz, $\lambda_1 = 1{,}875$ cm.

Pour $f_2 = 18$ GHz, $\lambda_2 = 1{,}667$ cm.

- Condition de propagation du mode fondamental TE_{11} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{TE_{11}} \rightarrow \lambda_1 < \frac{2\pi a}{1{,}841} \rightarrow a > 0{,}55 \text{ cm}$$

- Condition de non propagation du premier mode supérieur TM_{01} :

$$\lambda > (\lambda_c)_{TM_{01}} \rightarrow \lambda_2 > \frac{2\pi a}{2{,}405} \rightarrow a < 0{,}638 \text{ cm}$$

Donc : $0{,}55 \text{ cm} < a < 0{,}638$ cm.

2) Conditions de propagation d'un mode TE ou TM :

$$\lambda < (\lambda_c)_{TE} = \frac{2\pi a}{u'_{nm}} \text{ et } \lambda < (\lambda_c)_{TM} = \frac{2\pi a}{u_{nm}}$$

D'où : u'_{nm} et $u_{nm} < \dfrac{2\pi a}{\lambda} = 4{,}4$

Il en résulte que peuvent se propager les modes : TE_{11}, TE_{21}, TE_{01}, TE_{31} et TM_{01}, TM_{11}.

EXERCICE 13.6

1) Condition de propagation du mode TM_{01} :

$$\lambda < (\lambda_c)_{01} = \frac{2\pi a}{2{,}405} \rightarrow a > \frac{2{,}405\lambda}{2\pi} = 1{,}15 \text{ cm}$$

Condition de non propagation du premier mode supérieur TM_{11} :

$$\lambda > (\lambda_c)_{11} = \frac{2\pi a}{3{,}832} \rightarrow a < \frac{3{,}832\lambda}{2\pi} = 1{,}83 \text{ cm}$$

D'où : 1,15 cm < a < 1,83 cm.

2) À partir de la condition de propagation du mode TM_{01}, nous trouvons la longueur d'onde supérieure de la bande :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi \cdot 1{,}5}{2{,}405} = 3{,}92 \text{ cm} \rightarrow f_1 = 7{,}655 \text{ GHz}$$

À partir de la condition de non propagation du mode TM_{11}, nous trouvons la longueur d'onde inférieure de la bande :

$$\lambda_2 = \frac{2\pi a}{3{,}832} = 2{,}46 \text{ cm} \rightarrow f_2 = 12{,}20 \text{ GHz}$$

EXERCICE 13.7

1) L'impédance d'onde d'une mode TE est donnée par :

$$\zeta_{TE} = \frac{\zeta}{\cos\psi}$$

$$\text{avec } \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

et : $\cos\psi = \dfrac{\lambda}{\lambda_g}$

$$\rightarrow \zeta_{10}^a = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{\lambda_g^a}{\lambda_0}$$

Calculons λ_g^a/λ_0 :

$$\left(\frac{1}{\lambda_g^a}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 \text{ avec } \lambda_0 = \frac{c}{f} \text{ et } \lambda_c = 2a$$

d'où : $\dfrac{\lambda_g^a}{\lambda_0} = \left[1 - \left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$\rightarrow \zeta_{10}^d = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\,\frac{\lambda_g^d}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}\,\frac{\lambda_g^d}{\lambda}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{\lambda_g^d}{\lambda_0}$$

Calculons λ_g^d/λ_0 :

$$\left(\frac{1}{\lambda_g^d}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2$$

avec : $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ et $\lambda_c = 2a$

d'où :

$$\frac{\lambda_g^d}{\lambda_0} = \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right|^{-1/2} = \left|\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right|^{-1/2}$$

2) Considérons un guide court-circuité rempli d'air : $\underline{\Gamma}_R = -1$ et $\gamma = j\beta_a$.

D'après la relation (152) :

$$\underline{\zeta}(z) = \zeta_{10}^a \frac{1 - e^{-2j\beta_a z}}{1 + e^{-2j\beta_a z}}$$

$$= \zeta_{10}^a\, j \operatorname{tg} \beta_a z$$

avec : $\beta_a = \dfrac{2\pi}{\lambda_g^a}$

Il y a un minimum nul pour $\operatorname{tg} \beta_a z_m = 0$ soit $\beta_a z_m = k\pi$, d'où :

$$z_m = k\,\frac{\lambda_g^a}{2}$$

3) Considérons un guide court-circuité, rempli de diélectrique jusqu'à $z = \ell$ et rempli d'air au-delà.

- Dans le tronçon rempli de diélectrique :

$$\underline{\Gamma}_R = -1 \text{ et } \gamma = j\,\beta_d.$$

D'après la relation (152) :

$$\underline{\zeta}(z) = \zeta_{10}^d\,\frac{1 - e^{-2j\beta_d z}}{1 + e^{-2j\beta_d z}}$$

$$= \zeta_{10}^d\, j\,\mathrm{tg}\,\beta_d z$$

avec : $\beta_d = \dfrac{2\pi}{\lambda_g^d}$

- Dans le tronçon rempli d'air, plaçons-nous à une distance s de l'interface (soit à $s + \ell$ de l'origine) sur laquelle $\underline{\zeta}(\ell) = \zeta_{10}^d\, j\,\mathrm{tg}\,\beta_d \ell$.

En appliquant la formule (154) de transformation des impédances d'onde, nous avons :

$$\underline{\zeta}(s + \ell) = \zeta_{10}^a\,\frac{\underline{\zeta}(\ell) + j\,\zeta_{10}^a\,\mathrm{tg}\,\beta_a s}{\zeta_{10}^a + j\,\underline{\zeta}(\ell)\,\mathrm{tg}\,\beta_a s}$$

NB

s étant compté à partir de l'interface, nous avons donc : $s = z - \ell$.

4) En un minimum nul de champ électrique, nous avons : $\underline{\zeta}(s_m + \ell) = 0$, ce qui implique que :

$$\underline{\zeta}(\ell) + j\,\zeta_{10}^a\,\mathrm{tg}\,\beta_a s_m = 0$$

soit : $j\,\zeta_{10}^d\,\mathrm{tg}\,\beta_d \ell + j\,\zeta_{10}^a\,\mathrm{tg}\,\beta_a s_m = 0$

d'où : $\lambda_g^d\,\mathrm{tg}\,\beta_d \ell = -\lambda_g^a\,\mathrm{tg}\,\beta_a s_m$

avec : $s_m = (z_m - \ell) + d = k\,\dfrac{\lambda_g^a}{2} + (d - \ell)$

Or : $\mathrm{tg}\,\beta_a s_m = \mathrm{tg}\left[\dfrac{2\pi}{\lambda_g^a}\left(k\,\dfrac{\lambda_g^a}{2}\right) + \dfrac{2\pi}{\lambda_g^a}(d - \ell)\right]$

$$= \mathrm{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda_g^a}(d - \ell)\right]$$

Donc : $\dfrac{\lambda_g^d}{2\pi\ell}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\pi\ell}{\lambda_g^d}\right) = -\dfrac{\lambda_g^a}{2\pi\ell}\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{2\pi}{\lambda_g^a}(d - \ell)\right]$

Nous avons :

$\ell = 1{,}5$ cm ; $d = 0{,}97$ cm et $\lambda_g^a = 3{,}975$ cm

d'où : $\dfrac{\mathrm{tg}\,u}{u} = 0{,}4682$ avec $u = \dfrac{2\pi\ell}{\lambda_g^d}$

La solution est :

$$u = 4{,}247 \rightarrow \lambda_g^d = 2{,}22 \text{ cm}$$

et : $\varepsilon_r = \left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_g^d}\right)^2 \rightarrow \varepsilon_r = 2{,}25.$

EXERCICES DU CHAPITRE 14

Les guides d'ondes diélectriques

EXERCICE 14.1

1) Pour qu'il y ait propagation, il faut que :

$$\frac{4\pi a}{\lambda_1}\cos\theta + 2\varphi' = 2m\pi \qquad (1)$$

et que : $\theta \geq \theta_{1L} = \arcsin\dfrac{n_2}{n_1} \rightarrow \cos\theta \leq \cos\theta_{1L}$

La réflexion totale s'effectue sans déphasage ($\varphi' = 0$) dans le cas TE et avec un déphasage de π ($\varphi' = \pi$) dans le cas TM (voir § 14.2.1).

Pour $\theta = \theta_{1L}$, la relation (1) va nous donner la valeur maximale de m, soit m_L, qui correspond au cas où $\varphi' = \pi$:

$$\frac{4\pi a}{\lambda_1}\cos\theta_{1L} + 2\pi = 2\,m_L\,\pi$$

d'où : $m_L = 1 + \dfrac{2a}{\lambda_0} n_1 \cos\theta_{1L}$ (2)

Avec $a\ \lambda_0 = 50$, $n_1 = 1{,}5$ et $\theta_{1L} = 69°$, nous trouvons :

$$m_L = 54{,}8 \rightarrow 54 \text{ modes.}$$

2) À partir de la formule

$$M = 2\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}\,\frac{a}{\lambda_0}$$

nous retrouvons ce résultat.

EXERCICE 14.2

Pour que seul le mode fondamental puisse se propager, il faut écrire la condition de non propagation des premiers modes supérieurs TM_{01} et TE_{01}, soit :

$$\lambda_1 > (\lambda_c)_{01} = \frac{2\pi a}{2{,}405}\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}}}$$

D'où l'on déduit le diamètre maximal du cœur :

$$2a_M = \frac{2{,}405\,\lambda_1}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}}$$

Soit : $2a_M = 2{,}3\,\lambda_1$.

λ_1 est la longueur d'onde dans le cœur du guide ; donc :

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{1r}}}\cdot\frac{1}{f}$$

$$= \frac{3\cdot 10^8}{1{,}5}\cdot\frac{1}{230\cdot 10^{12}} = 0{,}87\ \mu\text{m}$$

d'où : $2a_M = 2\ \mu\text{m}$.

EXERCICE 14.3

1) La fréquence normalisée d'une fibre optique est :

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$= \frac{50\cdot 10^{-6}}{1{,}3\cdot 10^{-6}}\,\pi\sqrt{1{,}45^2 - 1{,}40^2}$$

d'où : $V = 45{,}613$

- Pour une fibre à saut d'indice :

$$M = \frac{V^2}{2} = 1\,040 \text{ modes,}$$

- pour une fibre à gradient d'indice :

$$M = \frac{V^2}{4} = 520 \text{ modes.}$$

2) M est inversement proportionnel au carré de la longueur d'onde. Donc, le nombre de modes est multiplié par le rapport $(1{,}3/0{,}83)^2 = 2{,}453$. Nous avons donc respectivement :

2 551 modes et 1 275 modes.

EXERCICE 14.4

1) L'ouverture numérique est calculée d'après :

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{0{,}29} = 0{,}5385$$

$$\theta_M = \arcsin NA = \arcsin 0{,}5385 = 32{,}58°$$

2) Le rendement énergétique du couplage est donné par :

$$1 - \cos^{m+1} \theta_M = 1 - \cos^3 32{,}58° = 0{,}40$$

La perte due au couplage est donc :

$$10 \lg 0{,}40 = -3{,}96 \text{ dB}$$

3) Le pourcentage de puissance transmise est :

$$1 - \left(\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{0{,}5}{2{,}5}\right)^2 = 0{,}96$$

La perte de Fresnel est donc :

$$10 \lg 0{,}96 = -0{,}18 \text{ dB}.$$

EXERCICE 14.5

1) L'élargissement d'impulsion est donné par :

$$\Delta T = \frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2)\frac{L}{c}$$

$$= \frac{1{,}5 \cdot 0{,}1}{1{,}4} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^5} = 0{,}357 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

donc : $\frac{1}{\Delta T} = 2{,}8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$; d'où l'on déduit :

- le débit numérique maximal = 2,8 Mbit/s,
- la bande passante maximale = 2,8 MHz.

2) Dans ce cas, l'élargissement d'impulsion est donné par :

$$\Delta T = \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta n)^2}{n_c} \cdot \frac{L}{c}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{(0{,}1)^2}{1{,}5} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^5} = 2{,}777 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

- débit numérique maximal = 360 Mbit/s,
- bande passante maximale = 360 MHz.

EXERCICE 14.6

Le rapport des bandes passantes de ces deux fibres est $8n_c/\Delta n$. Il faut donc que :

$$8\frac{n_c}{\Delta n} = 1\,000$$

En prenant $n_c = 1{,}5$, nous trouvons que

$$\Delta n = n_c - n_2$$

doit être égale à 0,012.

D'où : $n_2 = 1{,}5 - 0{,}012 = 1{,}488$.

EXERCICE 14.7

1) $\Delta T = \frac{L}{c}(\Delta\lambda)\lambda_0 \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$

$$= \frac{1}{3 \cdot 10^5} 5 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{10}$$

On trouve : $\Delta T = 0{,}1083 \cdot 10^{-9}$ s

2) $\frac{1}{\Delta T} = 9{,}230 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$;

d'où l'on déduit :

- le débit numérique maximal = 9,230 Gbit/s
- la bande passante maximale = 9,230 GHz.

EXERCICES DU CHAPITRE 15

Les cavités électromagnétiques

EXERCICE 15.1

La longueur d'onde de résonance d'un mode *mnp* est donnée par :

$$\left(\frac{1}{\lambda_{mnp}}\right)^2 = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\ell}\right)^2$$

Pour 3 GHz, $\lambda_0 = 10$ cm et pour 4 GHz, $\lambda_0 = 7{,}5$ cm.

Nous recherchons donc les λ_{mnp} telles que :

$$\left(\frac{1}{10^{-1}}\right)^2 < \left(\frac{1}{\lambda_{mnp}}\right)^2 < \left(\frac{1}{0{,}75 \cdot 10^{-1}}\right)^2 \quad \text{m}^{-2}$$

Soit :

$$10^2 < \left(\frac{100m}{15}\right)^2 + \left(\frac{100n}{10}\right)^2 + \left(\frac{100p}{30}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2 10^2$$

Ou : $1 < \left(\frac{m}{1{,}5}\right)^2 + n^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2$

d'où : $9 < 4m^2 + 9n^2 + p^2 < 16$.

Les solutions sont les suivantes :

Valeurs de			Mode	$\frac{9}{100}\left(\frac{1}{\lambda_{mnp}}\right)^2$	λ_{mnp} (cm)	f_{mnp} (GHz)
p	m	n				
0	1	1	TM_{110}	13 m^{-2}	8,32	3,606
1	1	1	TE_{111}, TM_{111}	14 —	8,02	3,741
1	0	1	TE_{011}	10 —	9,49	3,161
2	0	1	TE_{012}	13 —	8,32	3,606
3	1	0	TE_{103}	13 —	8,32	3,606

EXERCICE 15.2

La fréquence de résonance d'un mode *mnp* est donnée par :

$$\left(\frac{f_{mnp}}{v}\right)^2 = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\ell}\right)^2$$

Les trois premières fréquences de résonance correspondent aux modes :

$$TE_{101} \rightarrow \left(\frac{f_{101}}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\ell}\right)^2 \qquad (1)$$

$$TE_{011} \rightarrow \left(\frac{f_{011}}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\ell}\right)^2 \qquad (2)$$

$$TM_{110} \rightarrow \left(\frac{f_{110}}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^2 \qquad (3)$$

Supposons que $\ell > a > b$; nous avons :

$$f_{101} = 5{,}196 \text{ GHz} < f_{011}$$
$$= 6 \text{ GHz} < f_{110} = 6{,}708 \text{ GHz}$$

$$(2)-(1) \rightarrow \left(\frac{1}{2b}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{f_{011}}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_{101}}{v}\right)^2 \qquad (4)$$

En faisant la différence (3) – (4), nous obtenons :

$$2v^2\left(\frac{1}{2a}\right)^2 = f_{110}^2 - f_{011}^2 + f_{101}^2$$

Soit : $\sqrt{2}\, v \frac{1}{2a} = (45 - 36 + 27)^{1/2} \cdot 10^9$

$$= \sqrt{36} \cdot 10^9$$

D'où : $2a = \sqrt{\frac{2}{36}} \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^9}$ cm $= 7{,}07$ cm.

En faisant la somme (3) + (4) et en opérant de même, nous obtenons $2b = 5{,}77$ cm.

Enfin : $\left(\frac{1}{2\ell}\right)^2 = \left(\frac{f_{101}}{v}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2$

$= 0{,}03 - 0{,}02 = 0{,}01$

D'où : $2\ell = 10$ cm.

EXERCICE 15.3

La fréquence de résonance d'un mode TE_{mnp} est donnée par :

$$f_{mnp}^2 = v^2 \left| \left(\frac{u'_{nm}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2h}\right)^2 \right|$$

Pour le mode fondamental TE_{111} :

$$u'_{nm} = 1{,}841 \text{ et } p = 1.$$

Comme l'on veut que $f_{111} = 9$ GHz :

$$\left(\frac{1}{2h}\right)^2 = \left(\frac{9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}\right)^2 - \left(\frac{1{,}841}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}}\right)^2$$

$$= 30^2 - 19{,}53^2$$

D'où : $2h = 43{,}92$ mm $\rightarrow$ $\boldsymbol{h = 21{,}96}$ **mm.**

EXERCICE 15.4

1) a) $\beta^2 = k_0^2 \varepsilon_r - h^2$

$$\Rightarrow \beta^2 = \left(k_0 \sqrt{\varepsilon_r}\right)^2 - \left(\frac{5{,}4}{D}\right)^2$$

Pour que β soit réel, il faut que β^2 soit positif, d'où :

$$k_0 \sqrt{\varepsilon_r} > \frac{5{,}4}{D} \Leftrightarrow \frac{5{,}4}{k_0 \sqrt{\varepsilon_r}} < D$$

b) $\alpha_2^2 = h^2 - k_0^2 \varepsilon_{2r} \Rightarrow \alpha_2^2 = \left(\frac{5{,}4}{D}\right)^2 - \left(k_0 \sqrt{\varepsilon_{2r}}\right)^2$

Pour que α_2 soit réel, il faut que α_2^2 soit positif, d'où :

$$\frac{5{,}4}{D} > k_0 \sqrt{\varepsilon_{2r}} \Leftrightarrow \frac{5{,}4}{k_0 \sqrt{\varepsilon_{2r}}} > D$$

c) Nous trouvons : 4,08 mm $< D <$ 16,65 mm.

2) Pour calculer la longueur L d'après la formule (19), nous devons déterminer d'abord α_1, α_2 et β d'après (21), (22) et (20) compte tenu de ce que : $h = 5{,}4/D = 540$ m^{-1}.

$$\alpha_1^2 = (540)^2 - \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-2}}\right)^2 = 247\,734{,}89$$

D'où : $\alpha_1 = 497{,}73$ m^{-1}.

$$\alpha_2^2 = (540)^2 - \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-2}}\right)^2 2{,}4 = 186\,323{,}73$$

d'où : $\alpha_2 = 431{,}65$ m^{-1}.

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-2}}\right)^2 40 - (540)^2 = 1\,463\,004{,}6$$

d'où : $\beta = 1\,209{,}55$ m^{-1}.

La hauteur L est donc : $L = 2{,}35$ mm.

EXERCICE 15.5

1) Calculons $\partial F / \partial r$ et écrivons que $\partial F / \partial r = 0$.

F est de la forme $\frac{u}{v} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u = (1 + A^2 r^2)^{3/2} \rightarrow u' = 3A^2 r (1 + A^2 r^2)^{1/2}$

$v = 1 + A^2 r^3 \rightarrow v' = 3A^2 r^2$

On trouve que $\partial F / \partial r = 0$ si $r = 1$, soit $2R = h$.

Pour $r = 1 \rightarrow F_M = \frac{u'_{nm}}{2\pi} (1 + A^2)^{1/2}$

2) D'après la relation (43) :

$$(Q_j)_M = \frac{2}{\delta_s} \cdot \frac{V}{S} F_M$$

$$\frac{1}{\delta_s} = \sqrt{\pi \mu_0 \sigma_1 f}$$

$$= (\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5{,}7 \cdot 10^7 \cdot 10^{10})^{1/2}$$

$$= 15 \cdot 10^5$$

Le volume V de la cavité est :

$$V = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

La surface S des parois est :

$$S = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$

$$F_M = \frac{u'_{01}}{2\pi}\left|1 + \left(\frac{\pi}{2u''_{01}}\right)^2\right|^{1/2}$$

$$= 0{,}61\left|1 + \left(\frac{1}{2{,}44}\right)^2\right|^{1/2} = 0{,}66$$

D'où : $(Q_j)_M = 3 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}66$

$= 40\,000.$

EXERCICE 15.6

1) À la résonance, la relation entre le coefficient de réflexion complexe de la cavité $\underline{\Gamma}_e$ et le facteur de couplage β est donnée par (82) :

$$\underline{\Gamma}_e = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

En dehors de la résonance, la cavité se comporte comme un court-circuit et $\underline{\Gamma}_e = -1$. Donc, à la résonance, $\arg \underline{\Gamma}_e = \pi$ et $\beta < 1$: la cavité est sous-couplée.

$$\Gamma_e = \left|\underline{\Gamma}_e\right| = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

$$\rightarrow \beta = \frac{1 - \Gamma_e}{1 + \Gamma_e} = \frac{1 - 0{,}33}{1 + 0{,}33} = 0{,}5$$

2) La fréquence de résonance est :

$$f_0 = 9\,000 \text{ MHz}$$

La largeur de bande à mi-puissance est :

$$(\Delta f)_{1/2} = 9\,012 - 8\,988 = 24 \text{ MHz}$$

Or : $\frac{P_{cav}}{P_{inc}} = \frac{K}{1 + (2x\,Q_{ch})^2}$

avec : $x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{f - f_0}{f_0}$

À la résonance : $x = 0$ et $\frac{P_c}{P_i} = K$.

Aux fréquences telles que $\frac{P_c}{P_i} = \frac{K}{2}$, $2x_{1/2}\,Q_{ch} = 1$

D'où : $Q_{ch} = \frac{1}{2\,x_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_0}{f_{1/2} - f_0} = \frac{f_0}{(\Delta f)_{1/2}}$

Donc : $Q_{ch} = \frac{9\,000}{24} = 375.$

Comme : $\frac{Q_{pr}}{Q_{ch}} = \beta + 1 \rightarrow Q_{pr} = 1{,}5\,Q_{ch} = 562{,}5$

et : $\frac{Q_{pr}}{Q_{ex}} = \beta \rightarrow Q_{ex} = \frac{Q_{pr}}{0{,}5} = 1\,125$

EXERCICE 15.7

1) D'après (112) :

$$n' = \frac{f_0}{f_d} = \frac{10}{9} = 1{,}111 \rightarrow \varepsilon' = 1{,}234$$

D'après (113b) :

$$n' = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1 \rightarrow \varepsilon' = 1{,}21$$

L'approximation est donc de 1,1 % sur n' et de 2,4 % sur ε'.

2) $\left(\frac{1}{Q_{ch}}\right)_{air} = \frac{(\Delta f)_a}{f_a} = \frac{1}{8\,333} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$

$$\left(\frac{1}{Q_{ch}}\right)_{gaz} = \frac{(\Delta f)_g}{f_g} = \frac{4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} = 4{,}44 \cdot 10^{-4}$$

D'après (118) :

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{(\Delta f)_g}{f_g} - \frac{(\Delta f)_a}{f_a} = 3{,}24 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon'' = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$n'' = \frac{\varepsilon''}{2n'} = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$$

Donc : $\underline{n} = 1{,}1 - j\,1{,}82 \cdot 10^{-4}$

et : $\underline{\varepsilon} = 1{,}21 - j\,4 \cdot 10^{-4}$

EXERCICE 15.8

1) Par définition :

$$Q_j = \frac{W_a}{P_j}\,\omega$$

W_a est l'énergie emmagasinée dans la cavité.

P_j représente les pertes par effet Joule dans les réflecteurs.

ω est la pulsation de résonance de la cavité.

Soit P_a, la puissance moyenne transportée par l'onde qui se déplace dans la cavité entre les deux réflecteurs distants de d ; elle est égale à l'énergie emmagasinée, divisée par le temps de parcours :

$$P_a = \frac{W_a}{\frac{d}{c}} = W_a \frac{c}{d}$$

Donc : $Q_j = \omega \frac{P_a}{P_j} \cdot \frac{d}{c}$

or : $\alpha_R = \frac{P_j}{P_a}$

D'où : $Q_j = \omega \frac{d}{\alpha_R c} = 2\pi f \frac{d}{\alpha_R c}$

Finalement : $Q_j = 2\pi \frac{d}{\alpha_R \lambda_0}$ (relation 122)

2) $\alpha_R = \left(\frac{8\,\epsilon_0\,\omega}{\sigma}\right)^{1/2}$

$$\alpha_R^2 = \frac{8 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{36\pi \cdot 10^9 \cdot 5{,}33 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-8}}{\lambda_0}$$

Donc : $Q_j = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} \cdot \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{10^{-4}}$

$$= 4\pi \cdot 10^4 \frac{d}{\sqrt{\lambda_0}}$$

Avec $d = 0{,}20$ m et $\lambda_0 = 1$ mm, nous trouvons :

$$Q_j = \frac{12{,}56 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2}{\sqrt{10^{-3}}} = 800\,000$$

3) D'après (48) :

$$Q_d = \frac{1}{\sigma \delta} = 500\,000$$

$$\frac{1}{Q_{pr}} = \frac{1}{Q_j} + \frac{1}{Q_d} = \frac{1{,}25}{10^6} + \frac{2}{10^6} = \frac{3{,}25}{10^6}$$

D'où : $Q_{pr} = 307\,692$.